Exercice 1

(a) $7n + 15 \equiv ? \mod 3n+2$

$n=1$: $7+15 = 22 \equiv 2 \mod 5$

$n=2$: $14+15 = 29 \equiv 5 \mod 6+2$ (8)

$n=3$: $21+15 = 36 \equiv 3 \mod 9+2$ (11)

$n=4$: $28+15 = 43 \equiv 1 \mod 12+2$ (14)

(b) $7n+15 = q(3n+2) + 2$

$7n+15 \equiv 7n+15 \mod 3n+2$

$7n+15 \equiv n+11 \mod 3n+2$

$n+11 < 3n+2 \quad \forall n \geq 5$ d'où $\underline{n+11}$

(c) On doit montrer que $2^{5n+1} + 3^{n+3} = 29k$ avec $k \in \mathbb{N}$

Raisonnons par récurrence

Init $n=0$ $2^1 + 3^3 = 27+2 = 29 = 29 \cdot 1$ vrai

Hérédité : $P(n)$: Supposons que $2^{5n+1} + 3^{n+3} = 29k$ avec $k \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow 2^{5n+1} \equiv -3^{n+3}$

$P(n+1)$: $2^{5(n+1)+1} + 3^{(n+1)+3}$

$= 2^{5n+6} + 3^{n+4} = 2^{5n} \cdot 2^6 + 3^n \cdot 3^4 \equiv 2^{5n} \cdot 6 + 3^n (-6)$

$\equiv 6(2^{5n} - 3^n)$

$\equiv 3(2^{5n+1} - 2 \cdot 3^n)$

$\equiv 3(-3^{n+3} - 2 \cdot 3^n)$

$\equiv 3(-3^n \cdot 3^3 - 2 \cdot 3^n)$

$\equiv -3^n(3^4 + 6)$

$\equiv -3^n(87)$ $\quad 87 \equiv 0 \mod 29$

$\equiv 0 \mod 29$

Donc par récurrence on a montré que $2^{5n+1} + 3^{n+3} \equiv 0 \mod 29$

Exercice 2

a) $pgcd(87,24) =$

$87 = 24\cdot 3 + 15$

$24 = 15\cdot 1 + 9$

$15 = 9\cdot 1 + 6$

$9 = 6 + 3$

$6 = 3\cdot 2 + 0$

$3 = 9 - 6$

$= 9 - (15 - 9) = 2\cdot 9 - 15$

$= 2\cdot(24 - 15) - 15 = 2\cdot 24 - 3\cdot 15$

$= 2\cdot 24 - 3(87 - 3\cdot 24)$

$= 2\cdot 24 - 3\cdot 87 + 9\cdot 24$

$= 11\cdot 24 - 3\cdot 87$

Par l'algorithm d'Euclide $pgcd(87,24) = 3$

b) Supposons que $c \not\equiv 0 \mod 3$

$24x + 87y = c \iff 3\cdot(8x + 29y) = c$

cela veut dire que c est un multiple de 3 mais on a supposé que $c \not\equiv 0 \mod 3$ d'où contradiction qui nous donne qu'il n'a aucune solution lorsque $c \not\equiv 0 \mod 3$

Soit $c = 3\cdot c'$ $c' \in \mathbb{Z}$

$(11\cdot 24 + (-3)\cdot 87 = 3) \times c'$

$(11c')24 + (-3c')87 = 3c' = c$

D'où $(11c', -3c') = (x, y)$ est une des solutions.

c) $24x + 87y = c \iff 8x + 29y = c'$

$\iff 8X + 29Y = 0$

$\Rightarrow 8X = -29Y$

$\Rightarrow \begin{cases} 8 \mid Y & \text{car } 8 \wedge 29 = 1 \Rightarrow Y = 8n \\ 29 \mid X & \text{car } 8 \wedge 29 = 1 \Rightarrow X = 29m \end{cases}$

Soit $X = x - x_0 = x - 11c'$

$Y = y - y_0 = y + 3c'$

$\Rightarrow 8\cdot 29\cdot m = -29\cdot 8\cdot n \Rightarrow m = -n \Rightarrow (X,Y) \in \{(29k, -8k) : k \in \mathbb{Z}\}$

$\Rightarrow X = 29k \Rightarrow \begin{cases} x = X + x_0 = 29k + 11c' \\ y = Y + y_0 = -8k - 3c' \end{cases}$

$Y = -8k$

D'où $(S) \iff \{(29k + 11c', -8k - 3c') : k \in \mathbb{Z}\}$

Exercice 4

(a) Soient $q, z \in \mathbb{Z}$

$q^4 \equiv 2 + z^2 \mod 3$ ssi $q^4 \equiv 0 \mod 3$

	$\cdot^2$	$\cdot^4$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{1}$
$\overline{2}$	$\overline{1}$	$\overline{1}$

mod 3

$2^4 = 16$

$q^4 \equiv 2 + z^2 \mod 3$ ssi $z^2 \equiv 1 \mod 3$

d'où $q^4 \equiv 0 \mod 3$ nécessairement.

(b) Soient $p, z \in \mathbb{Z}$

$3p^4 \equiv 1 + 4z^2 \mod 5$

	$\cdot^2$	$\cdot^4$	
0	0	0	mod 5
1	1	1	
2	4	1	$1 + 4 \cdot 0 = 1 \neq 3$
3	4	1	$1 + 4 = 0 \neq 3$
4	1	1	$1 + 4 \cdot 4 \equiv 2 \mod 5$ $\neq 3$

D'où $3p^4 \equiv 0 \mod 3$ nécessairement

(c) (ED) $\Leftrightarrow$ $3p^4 - 5p^4 - 4z^2 = 26$

$3p^4 - 5q^4 - 4z^2 = 26 \equiv 2 \mod 3$

$\equiv -5q^4 - 4z^2 \equiv 2 \mod 3$ car $3p^4 \equiv 0 \mod 3$ car $3 \equiv 0 \mod 3$

$\equiv q^4 \equiv 2 + 4z^2 \mod 3$ car $-5 \equiv 1 \mod 3$

$\equiv q^4 \equiv 2 + z^2 \mod 3$ car $4 \equiv 1 \mod 3$

D'après (a) $q \equiv 0 \mod 3$

3 est le seul nombre premier qui est un multiple de 3 d'où $\underline{q = 3}$

d) $3p^4 - 5p^4 - 4z^2 = 26 \equiv 1 \bmod 5$

$\Leftrightarrow 3p^4 - 4z^2 \equiv 1 \bmod 5$ car $5p^4 \equiv 0 \bmod 5$

$\Leftrightarrow 3p^4 \equiv 1 + 4z^2 \bmod 5$

$\Rightarrow p \equiv 0 \bmod 5$ d'après (B)

$p = 5$ car 5 est le seul nombre premier multiple de 5

e) D'après (c) et (d) $q = 3$ et $p = 5$

$3p^4 - 5q^4 - 4z^2 = 26$

$\Leftrightarrow 3 \cdot 5^4 - 5 \cdot 3^4 - 4z^2 = 26$

$\Leftrightarrow 3 \cdot 625 - 5 \cdot 81 - 4z^2 = 26$

$\Leftrightarrow -4z^2 = 26 + 405 - 1875$

$= 431 - 1875 = -1444$

$\Leftrightarrow 4z^2 = 1444$

$\Leftrightarrow z^2 = \frac{1444}{4} = 361$

$\Leftrightarrow z = \sqrt{361} = 19$

D'où $(5, 3, 19)$ est la solution.

Exercice 5

(a)

(i) $(\mathbb{R}^*, \times)$

Non, car pour $x = -1$ et $n = 2$

$\nexists y$ tq $y^2 = -1$

(ii) $(\mathbb{Q}_+^*, \times)$

Non, car pour $x = 2$ $n = 2$

$y^2 = 2 \Rightarrow y = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}_+^*$

(iii) $(\mathbb{R}, +)$

Soit $x \in \mathbb{R}$

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad n \cdot \frac{x}{n} = x$, où $\frac{x}{n} \in \mathbb{R}$

d'où $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \exists y \in \mathbb{R}$ tq $y \cdot n = x$

Donc $(\mathbb{R}, +)$ est divisible

(iv) $(\mathbb{Z}, +)$

Pour $x = 3$ et $n = 2$

$3 = 2 \cdot \frac{3}{2}$ où $\frac{3}{2} \notin \mathbb{Z}$

donc $(\mathbb{Z}, +)$ n'est pas divisible.

B) Soient $(G_1, *_1)$ $(G_2, *_2)$, montrons que $(G_1 \times G_2, \times)$ est divisible ssi G_1, G_2 sont divisible.

$\Rightarrow$ Supposons que G_1, G_2 sont divisible

Alors $\forall x_1 \in G_1, x_2 \in G_2, \forall n \in \mathbb{N}^* \exists y_1 \in G_1 \; y_2 \in G_2$ tq $x_1 = y_1^n \quad x_2 = y_2^n$

$G_1 \times G_2 = \{(x_1, x_2) : x_1 \in G_1, x_2 \in G_2\}$

↳ est divisible si $\forall (x_1, x_2) \in G_1 \times G_2$ $\forall n \in \mathbb{N}^* \; \exists (y_1, y_2) \in G_1 \times G_2$ tq $(x_1, x_2) = (y_1^n, y_2^n)$

Or G_1 et G_2 sont divisible par hyp. donc la propriété est satisfaite, d'où $G_1 \times G_2$ est divisible

$\Leftarrow$ Supposons que $G_1 \times G_2$ est divisible

Alors $\forall (x_1, x_2) \in G_1 \times G_2, \forall n \in \mathbb{N}^*, \exists (y_1, y_2) \in G_1 \times G_2$ tq $(y_1^n, y_2^n) = (x_1, x_2)$

On fixe $x_2 \in G_2$, alors $\forall x_1 \in G_1 \; \forall n \in \mathbb{N}^* \exists y_1$ tq $(x_1, x_2) = (y_1^n, y_2^n)$ D'où G_1 est divisible idem avec x_2 de G_2

c) Soit $\varphi : G_1 \longrightarrow G_2$ un isomorphisme

$\Rightarrow$ On suppose que G_1 est divisible

Alors $\forall x_1 \in G_1 \quad \exists x_2 \in G_2 \quad \varphi(x_1) = x_2$

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \varphi(y_1) = y_2$

$\exists y_1 \in G_1 \quad \exists y_2 \in G_2 \quad \varphi(y_1^n) = \varphi(y_1)^n = y_2^n$ car isomorphe

A l'inverse $\forall x_2 \in G \quad \exists x_1 \in G_1 \quad x_2 = \varphi(x_1)$ car isom.

Or $x_1 \in G_1$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \exists y_1 \in G_1 \quad x_1 = y_1^n$

$\exists y_2 \in G_2$ tq $y_2 = \varphi(y_1)$ (car isomorphe

$\Leftrightarrow \varphi(y_1^n) = \varphi(y_1)^n = y_2^n$

$y_1^n = x_1 \Rightarrow \varphi(y_1^n) = \varphi(x_1) = y_2^n = x_2$

Donc G_2 est divisible.

Idem avec G_2

Donc G_1 est divisible ssi G_2 l'est aussi

d) Supposons par l'absurde que $(\mathbb{R}, +)$ et $(\mathbb{R}^*, \times)$ sont isomorphes.

D'après c) G_1 est divisible ssi G_2 l'est ce qui n'est pas le cas car $(\mathbb{R}^*, \times)$ n'est pas divisible d'où $(\mathbb{R}, +)$ n'est pas divisible.

Contradiction, car $(\mathbb{R}, +)$ est divisible d'après a)

donc $(\mathbb{R}, +)$ et $(\mathbb{R}^*, \times)$ ne sont pas isomorphes.

Exercice 6

Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers.
et $3+4\mathbb{N} = \{3+4k : k \in \mathbb{N}\}$

(a) Non. car $3+4\cdot 3 = 15$ n'est pas premier.

(b) $\mathcal{P} \cap \{3+4k : 0 \le k \le 10\} = \{3, 7, 11, 19, 23, 31, 43\}$

(c) $q \in \mathcal{P}$ ≥ 2 q est toujours impair
donc de la forme $q = 1+2m$ avec $m \geq 2$
comme m est pair ou impair donc
de la forme $m = 2\ell$ ou $m = 1+2k$ avec $\ell \geq 1$, $k \geq 0$

d'où $q = 1+4\ell$ ou $q = 3+4k$

(d) (e) trivial

(f) $A := -1 + 4p_1 p_2 \dots p_r$

Si on décompose A en nombre premiers et tous les nombre sont de la forme $1+4\ell$, alors d'après (e) A doit être aussi de la forme $1+4L \Rightarrow A \equiv 1 \bmod 4$ ce qui n'est pas le cas car $A \equiv -1 \equiv 3 \bmod 4$
donc au moins 1 facteur premier de A est de la forme $3+4k$.

g)

g) On a supposé que $\text{card } X < \infty$