TD 1 Exercice 19

a) $51x + 14y = 0$

$51x = -14y$

$\Rightarrow 51 \wedge 14 = 1 \overset{\text{Gauss}}{\Rightarrow} \begin{cases} y = 51k \\ x = 14\ell \end{cases}$

$51 \cdot 14 \cdot \ell = -14 \cdot 51 \cdot k$

$\Rightarrow \ell = -k$

D'où la solution est $\{(-14k, 51k) : k \in \mathbb{Z}\}$

b) $51x + 21y = 1$

$\Leftrightarrow 3(17x + 7y) = 1$

$3 \nmid 1$ d'où il n'existe pas de solution.

[5.1]

c) $27x + 33y = 60$

$\Leftrightarrow 9x + 11y = 20$

solution evidente $(1,1) = (x', y')$

$9(x - x') + 11(y - y') = 0$

X " Y

Cherchons une solution générale

$9X + 11Y = 0 \Rightarrow 9X = -11Y \overset{\text{Gauss}}{\Rightarrow} \exists m,n \begin{cases} X = 11m \\ Y = 9n \end{cases}$ car $9 \wedge 11 = 1$

$\Rightarrow 9 \cdot 11 \cdot m = -11 \cdot 9 \cdot n \Rightarrow m = -n \quad (m,n) \in \{(k, -k) : k \in \mathbb{Z}\}$

$\Rightarrow X = 11k \qquad Y = -9k$

$\Rightarrow x = X + x' \qquad y = Y + y'$

$= 11k + 1 \qquad = -9k + 1$

D'où $(S) = \{(11k+1, -9k+1) : k \in \mathbb{Z}\}$

Exercice 23

On pose $N = 4u_1u_2\dots u_n - 1$

a) $4u_1\dots u_n \equiv 0 \mod 2$

$\Rightarrow 4u_1\dots u_n - 1 \equiv -1 \mod 2$ n'est pas divisible

$4u_1\dots u_n \equiv 0\, u_i \quad \forall i \in \{1,\dots,n\}$

$\Rightarrow 4u_1\dots u_n - 1 \equiv -1\, u_i$

d'où N n'est pas divisible par aucun nombre parmi $2, u_1, \dots, u_n$

b) $N \equiv -1 \mod m+1 \quad m \in \{2, u_1, \dots, u_n\}$

$(4u_1\dots u_n)^{-1}$

$4u_1\dots u_n - 1 \equiv 0 \mod p$

$(4u_1\dots u_n)^2 - 1 \equiv 0 \mod p$

$(4u_1\dots u_n - 1)(4u_1\dots u_n + 1) \equiv 0 \mod p$

$4u_1\dots u_n - 1 \equiv 0 \mod p$

$4u_1\dots u_n - 1 \equiv -1 \mod 4$

$\Leftrightarrow 4u_1\dots u_n \equiv 0 \mod 4$

$N \equiv -1 \mod 2u_1u_2u_3\dots u_n$

$N = q \cdot 2u_1\dots u_n - 1$

$N^2 = 4(qu_1\dots u_n)^2 - 4q\,u_1\dots u_n + 1$

$NN = 4k + 1$

Exercice 24

$\sqrt{p} = \frac{u}{v}$

On pose $d = pgcd(u,v)$ d'où $\exists u', v'$

tq $u = du'$ $v = dv'$

$\sqrt{p} = \frac{u}{v} = \frac{du'}{dv'} = \frac{u'}{v'}$ avec $u' \wedge v' = 1$

Donc on suppose que u et v sont premiers entre eux.

B) $\sqrt{p} = \frac{u}{v} \Rightarrow p = \frac{u^2}{v^2} \Rightarrow v^2 p = u^2$

$\Rightarrow (v^2 | u^2$ ou $p | u^2) \Rightarrow p | u^2$ car $u \wedge v = 1$

$p | u^2 \Rightarrow p | u$ car par gauss ($p | u$ ou $p \nmid u$)

C) $p | u \Rightarrow u = p^3 k$

$v^2 = p = u^2 = p^2 k^2$

$\Rightarrow v^2 = p^2 k^2$

$\Rightarrow v = pk$ d'où $\Rightarrow u \wedge v \neq 1$ Contradiction.

TD 3

Exercice 3

Soit G un groupe et $g \in G$

$\exists h \in G \quad gh = e_G$

$g^{-1} \mid gh = e_G \mid$

$g^{-1}gh = g^{-1}e$

$\Leftrightarrow e_G h = g^{-1}$

$\Leftrightarrow h = g^{-1}$

Exercice 4

Soit G un groupe

$\forall g \in G \quad gg = e_G$

$gg = e_G \Rightarrow g = g^{-1}$

$h \in G$

D'où $ghgh = e_G$

$g(ghgh)h = g e_G h$

$\Leftrightarrow hg = gh$

$g \mid (gh \cdot gh = e_G \mid$

$g(ghgh)h = gh$

$g^2 hg h^2 = gh$

$hg = gh$

Exercice 6

$\exp : (\mathbb{R}, +) \longrightarrow (\mathbb{R}^*, \times)$

$\log : (\mathbb{R}^*, \times) \longmapsto (\mathbb{R}, +)$

$\nearrow (\mathbb{R}_+, \times) \longrightarrow (\mathbb{R}_+, \times)$

$\nearrow (\mathbb{R}^*, \times) \longrightarrow (\mathbb{R}^*, \times)$

$\cdot^n (\mathbb{R}^*, \times) \longrightarrow (\mathbb{R}^*, \times)$

Exercice 7

$(\mathbb{Q}, +) \longrightarrow (\mathbb{Q}_+^*, \times)$

$\varphi(x+y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$

$\varphi(x+x) = \varphi(x)\,\varphi(x) = \varphi(y)$

Exercice 8

Soit $(G, \cdot)$ groupe et $(A, \cdot)$ $(B, \cdot)$ sous-groupes
$\subset G$ $\subset G$

$AB = \{a \cdot b : a \in A, b \in B\}$

$\Rightarrow$ $AB = BA$

$a \in A$ $a' \in A$ $\quad$ $b \in B$ $b \in B'$

Exercice 10

G - gpe $\quad A, B \subset G \quad |A| \wedge |B| = 1$

$d = \text{pgcd}(|A|, |B|) = 1$

$\exists k, \ell, \quad |G| = k|B| \quad k|B| = \ell|A| \Rightarrow |A| = k n'$

$|G| = \ell|A| \quad |B| = \ell n''$

$|A| =$