O S O

G T G T

5 E 5

N O N O

O S O

G T G T

5 E 5

N O N O

O S O

G T G T

5 E 5

$H < G$

$aH = \{ax : x \in H\}$

Une relation d'équivalence est une opération binaire sur un ensemble E

si : $aRa \quad \forall a \in E$

$aRb \iff bRa \quad a, b \in E$

$(aRb$ et $bRc) \implies aRc \quad a, b, c \in E$

Une classe d'équivalence d'un élément a dans E est un ensemble $Cl_R(a) = \{xRa : x \in E\}$

$Cl_R(a) = Cl_R(b)$ ou bien $Cl_R(a) \cap Cl_R(b) = \emptyset$

Thm: $Cl_R(a_i)$ tq $Cl_R(a_i) \cap Cl_R(a_j) = \emptyset$

$E = \bigcup_{i \in I} Cl_R(a_i)$

$\sim_g \qquad x \sim_g y \qquad x^{-1}y \in H$

$x \sim_d y \qquad yx^{-1} \in H$

$\bar{x}^g = \{x \sim_g y : y \in G\} = xH$ - ens à gauche mod H

$\bar{x}^d = \{x \sim_d y : y \in G\} = Hx$ ens à drte mod H

$G/H = \{\bar{x}^g : x \in G\}$ ens des classes à gauche

$H \backslash G = \{\bar{x}^d : x \in G\}$ ens des classes à droite

Cosets partition a group

$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\} = (G,+)$ $H = \{0, 2\}$

$H < \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$

$$\left.\begin{array}{l} H+1 = \{1,3\} = \{1,3\} \\ H+2 = \{2,0\} = \{0,2\} \\ H+3 = \{3,1\} = \{1,3\} \end{array}\right\} \text{Partition of a group}$$

$4\mathbb{Z} = \{-8, -4, 0, 4, 8 \dots$

$\{-5,-1,3,7,11\}$

$\overset{+}{\mathbb{Z}}/4\mathbb{Z} = \{0+\mathbb{Z},\ 1+4\mathbb{Z},\ 2+4\mathbb{Z},\ 3+4\mathbb{Z},\ 4+4\mathbb{Z}\}$

$1+4\mathbb{Z} = \{-7,-3,1,5,9\}$ $2+4\mathbb{Z} = \{-6,-2,2,6,10$ $4+4\mathbb{Z} = \{-4,0,4,8\}$

$= 0+\mathbb{Z}$

$ab^{-1} \in H$

$ab^{-1} = h' \in H$

$a = h'b \in Hb$

$\underbrace{h'^{-1}a}_{\in Ha} = b$ //

Def cotient $G/H = \{aH, bH, cH\}$
où $a, b, c \dots \in G$

pour bien définir la loi il faut que H soit distingué

$h \in H$

$g \in G$ $ghg^{-1} \in H$

$Ha = aH$

Structure :

$h \in H$

$g h g^{-1} \in H$

inverse

$(gH)(hH)(g^{-1}H) = (ghg^{-1}H)$ donnent H (elt neutre dans G/H)

$\in H$
elt neutre

Si $ghg^{-1} \notin H$

alors $(gH)(hH)(g^{-1}H) \neq H$ (e)
donc la loi n'est pas bien définie dans le groupe

Ker ϕ ss groupe et distingué

Donc on peut faire groupe quotient

1. E-P
   1. Enoncé
   2. pv :

2. Exs.

$\varphi : G \to H$

$\varphi(x) = \varphi(g)$

$\varphi(g)^{-1}\varphi(x) = e$

$\varphi(g^{-1}x) = e$

$g^{-1}x \in \operatorname{Ker}\varphi$

$g^{-1}x = k \in \operatorname{Ker}\varphi$

$x = gk \in g\operatorname{Ker}\varphi$

$\Rightarrow$

$x \in g\operatorname{Ker}\varphi$

et à l'inverse

$x \in g\operatorname{Ker}\varphi \Rightarrow$

$(\Leftarrow)$ $x = gk$ où k

$\varphi(x) = \varphi(gk) = \varphi(g)\underbrace{\varphi(k)}_{e}$

$\Rightarrow \varphi(x) = \varphi(g)$ $\Rightarrow$ Équivalence

$\varphi(x) = \varphi(g)$ ssi $x \in g\operatorname{Ker}\varphi$

$h \in \operatorname{Im}\varphi$: $\varphi^{-1}(h) = \{x \in G \mid \varphi(x) = \overset{h}{\cancel{\varphi(g)}}\} = g\operatorname{Ker}\varphi \in G/\operatorname{Ker}\varphi$

On fait tous x qui $\varphi(x) = h$ être seulement 1 élément

Prenons $h \in \operatorname{Im}\varphi \Rightarrow \exists\, g \in G$ tq $\varphi(g) = h$

$\varphi^{-1} : \operatorname{Im}\varphi \to G/\operatorname{Ker}\varphi$

Montrez $a \in Hb$

$\Rightarrow Ha = Hb$

On vérifie que φ^{-1} est un morphisme.

Prenons $h_1, h_2 \in \operatorname{Im}\varphi$

$\varphi(\overset{\exists}{g_1}) = h_1$ $\varphi^{-1}(h_1) = g_1\operatorname{Ker}\varphi$

$\varphi(\overset{\exists}{\underset{\in G}{g_2}}) = h_2$ $\varphi^{-1}(h_2) = g_2\operatorname{Ker}\varphi$

$\varphi^{-1}(h_1h_2) = g_1g_2\operatorname{Ker}\varphi$ $\varphi(g_1g_2) = h_1 h_2$ car groupe morphisme

$\varphi^{-1}(h_1)\varphi^{-1}(h_2) = g_1\operatorname{Ker}\varphi \cdot g_2\operatorname{Ker}\varphi$

$= g_1g_2\operatorname{Ker}\varphi$ multiplication dans un groupe quotient.

Alors c'est un morphisme

Montrons que ϕ^{-1} isomorphisme

$$\phi^{-1} : \mathrm{Im}\,\phi \longrightarrow G/\mathrm{Ker}\,\phi$$

$h_1, h_2 \in \mathrm{Im}\,\phi$

<u>Injectivité</u>

Supposons $\phi^{-1}(h_1) = \phi^{-1}(h_2) =$ coset $\mathrm{Ker}\,\phi$

alors $\exists g \in G$ tq $g \in \phi^{-1}(h_1) = \phi^{-1}(h_2)$

$\Rightarrow \phi(g) = h_1 \qquad \phi(g) = h_2$

alors $h_1 = h_2$

Alors ϕ^{-1} injective.

<u>Surjectivité</u>

Prenons $g\,\mathrm{Ker}\,\phi \in G/\mathrm{Ker}\,\phi$

$\phi^{-1}(\underbrace{\phi(g)}_{h \in \mathrm{Im}\,\phi}) = \{x \in G \mid \phi(x) = \phi(g)\} = g\,\mathrm{Ker}\,\phi$

Alors surjective.

Donc $\phi^{-1} : \mathrm{Im}\,\phi \longrightarrow G/\mathrm{Ker}\,\phi$ isomorph

$\Rightarrow \mathrm{Im}\,\phi \cong G/\mathrm{Ker}\,\phi$