
O
G
D
O
O
O
O
D

Exercice 1

$$E = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$

$u := (1\ 2\ 3) \circ (4\ \ 5\ 6) \circ (7\ \ 8\ \ 9)$
$v := (4\ 5\ 6) \circ (7\ \ 8\ \ 9)$
$w := (1\ 4\ 7) \circ (2\ 5\ 8) \circ (3\ \ 6\ 9)$

(a) Soit $1 \leq a_1 < a_2 < a_3 \leq 9$
et $\sigma = (a_1 \to a_2 \to a_3)$

Méthode 1

$o(\sigma) = 3$ et $\sigma^{o(\sigma)} = Id$ $\Rightarrow \sigma^3 = Id$

Méthode 2

$\sigma \circ \sigma \circ \sigma =$

$$\begin{pmatrix} a_1 \to a_2 \to a_3 \to a_1 \\ a_2 \to a_3 \to a_1 \to a_2 \\ a_3 \to a_1 \to a_2 \to a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} = Id$$

b) (d'après (a)) $\sigma^{-1}(\sigma \circ \sigma^2 = Id)$

$\Leftrightarrow \underline{\sigma^2 = \sigma^{-1}}$

c) Or u, v, w sont composées de cycles à supports disjoints, donc ils commutent

Alors $u^3 = u \circ u^2 = (1\,2\,3)^3 \circ (4\ 5\ 6)^3 \circ (7\,8\,9)^3$
$= (1\ 2\,3)(1\ 2\ 3)^2 \circ (4\,5\ \ 6)(4\ \ 5\,6)^2 \circ (7\ \ 8\,9)(7\,8\,9)^2$
(d'après (b)) $= (1\ 2\ 3)(1\,2\,3)^{-1} \circ (4\ 5\,6)(4\ 5\,6)^{-1} \circ (7\ 8\,9)(7\,8\,9)^{-1}$
$= Id \circ Id \circ Id = Id$

Idem avec v et w
d'où $u^3 = Id = v^3 = w^3$

Autre méthode

$$o(u) = \operatorname{ppcm}(o((1\ 2\ 3)), o((4\ 5\ 6)), o((7\ 8\ 9))) =$$
$$= \operatorname{ppcm}(3, 3, 3) = 3$$

de plus $\quad u^{o(u)} = Id = u^3 \quad$ comme $\underline{o(u) = 3}$

d) (d'après (b))

$$w^{-1} = w^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 7 & 1 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 8 & 2 & 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 9 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$w \circ v \circ w^{-1}$

$$\begin{pmatrix} 1 & \to 7 & \to 8 & \to 2 \\ 2 & \to 8 & \to 9 & \to 3 \\ 3 & \to 9 & \to 7 & \to 1 \\ 4 & \to 1 & \to 1 & \to 4 \\ 5 & \to 2 & \to 2 & \to 5 \\ 6 & \to 3 & \to 3 & \to 6 \\ 7 & \to 4 & \to 5 & \to 8 \\ 8 & \to 5 & \to 6 & \to 9 \\ 9 & \to 6 & \to 4 & \to 7 \end{pmatrix}$$

w^{-1} $\quad v \quad$ w

$$= (1 \to 2 \to 3) \circ (4 \to 4) \circ (5 \to 5) \circ (6 \to 6)$$
$$\circ (7 \to 8 \to 9) = (1\ 2\ 3) \circ (7 \circ 8 \circ 9)$$

e) $w^{-1} = w^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 7 & 1 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 8 & 2 & 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 9 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

$$w^{-1} \circ v \circ w = \begin{pmatrix} 1 & \to 4 & \to 5 & \to 2 \\ 2 & \to 5 & \to 6 & \to 3 \\ 3 & \to 6 & \to 4 & \to 1 \\ 4 & \to 7 & \to 8 & \to 5 \\ 5 & \to 8 & \to 9 & \to 6 \\ 6 & \to 9 & \to 7 & \to 4 \\ 7 & \to 1 & \to 1 & \to 7 \\ 8 & \to 2 & \to 2 & \to 8 \\ 9 & \to 3 & \to 3 & \to 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 4 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$w \quad v \quad w^{-1}$

$$= \underline{(1\ 2\ 3) \circ (4\ 5\ 6)}$$

f) $(w \circ v \circ w^{-1}) \circ (w^{-1} \circ v \circ w) = w \circ v \circ w^{-2} \circ v \circ w)$

$$= (1\ 2\ 3) \circ (7\ 8\ 9) \circ (1\ 2\ 3) \circ (4\ 5\ 6)$$
$$= (1\ 2\ 3)^2 \circ (4\ 5\ 6) \circ (7\ 8\ 9)$$

$$u^2 \circ v^{-1} = (1\ 2\ 3)^2 \circ (4\ 5\ 6)^2 \circ (7\ 8\ 9)^2 \circ (7\ 8\ 9)^{-1} \circ (4\ 5\ 6)^{-1}$$
$$= (1\ 2\ 3)^2 \circ (4\ 5\ 6) \circ (7\ 8\ 9)$$

d'où $u^2 \circ v^{-1} = w \circ v \circ w^{-2} \circ v \circ w$

$(w \circ v)^2 \circ w = w \circ v \circ w \circ v \circ w$

$w^{-2} = (w^2)^{-1} = (w^{-1})^{-1} = w$
car $w^2 = w^{-1}$ (d'après) b

d'où $\underline{(w \circ v)^2 \circ w = w \circ v \circ w^{-2} \circ v \circ w}$

g) $u^2 \circ v^{-1} = (w \circ v)^2 \circ w = w \circ v \circ w^{-2} \circ v \circ w$

$u^2 \circ v^{-1} \circ v = (w \circ v)^2 \circ w \circ v$
$= u^2 = (w \circ v)^3 \quad \Leftrightarrow \quad u^{-2} = (u^2)^{-1} = ((w \circ v)^3)^{-1}$
$= (w \circ v)^{-3} \quad = u$

mais $u^2 = u^{-1}$ d'où $u^{-2} = (u^2)^{-1} = (u^{-1})^{-1} = u$

donc $u = (w \circ v)^{-3}$

Exercice 4

Soit $N \geq 1$ et S_n le groupe de permutations de $E = \{1, 2, \ldots, N\}$

Soit $\sigma \in S_N$ cycle avec $o(\sigma) = n$ où $2 \leq n \leq N$

$m \geq 1$ $\quad$ $\tau = \sigma^m$

(a)

(a) On peut étudier le cas où $N=n$ car si $N>n$ alors

$\sigma = (1 \dots n)$ et $E = \{1, 2, \dots, n, n+1, \dots, N\}$

où $n+1, \dots, N$ sont points fixes et ne sont pas affectés par σ donc on peut décomposé σ en cycles et $n+1, \dots, N$ ne soront pas affecté

De plus on peut étudier le cas $\sigma = (1 \dots n)$ et puis utiliser les conjugaiso pour changer les coordonnées.

b) Soit $n \geq 2$ et $\sigma = (1 \dots n) \in S_n$

$\Rightarrow \sigma(i) = i+1 \mod n$

$m = dm'$ $n = dn'$ où $d = pgcd(m, n)$ $m' \wedge n' = 1$

$\tau(i) = \sigma^m(i) = \sigma^{m-1}(\sigma(i)) = \sigma^{m-1}(i+1) = \sigma^{m-2}(\sigma(i+1)) = \sigma^{m-2}(i+2)$

d'où $\tau(i) = i+m$

$\tau^l(i) = \sigma^{lm}(i) = i + lm$

D'où $Orb_\tau(i) = \{i, i+m, i+2m, \dots, i+(q-1)m\}$ avec tous les élément distincts. avec un nombre q à déterminer

D'après le cours $q = \min\{l \in \mathbb{Z} : \tau^l(i) = i\}$

Soit $j \in E$, d'après le cours $Orb_\tau(i) = Orb_\tau(j)$ ou bien
$Orb_\tau(i) \cap Orb_\tau(j) = \emptyset$

On cherche q tq $i + qm \equiv i \mod n$

$\Leftrightarrow qm \equiv 0 \mod n$

$dn' \mid qdm'$

$\Leftrightarrow n' \mid qm' \overset{\text{Gauss}}{\Rightarrow} n' \mid q$ car $m' \wedge n' = 1$

$\Rightarrow q = \frac{n}{d} = n'$

d'où $q = \frac{n}{pgcd(n,m)} = n'$

donc $Orb_\tau(i)$ est constitué de n' éléments distincts.

c) Soient $1 \leq i, j \leq n$
et

$Orb_\sigma(i) = \{i, i+m, \dots, i+(n'-1)m\}$
$Orb_\sigma(j) = \{j, j+m, \dots, j+(n'-1)m\}$

D'après le cours $Orb_\sigma(i) = Orb_\sigma(j)$ ou bien
$Orb_\sigma(i) \cap Orb_\sigma(j) = \emptyset$

Supposons que $Orb_\sigma(i) = Orb_\sigma(j)$

alors $j \in Orb_\sigma(i) = \{i, i+m, i+2m, i+(n'-1)m\}$

$\Rightarrow j = i + qm$ avec $0 \leq q \leq n'-1$

$i + qm = i + qdm' \equiv i \mod d$ car $qdm \equiv 0 \mod d$

Or $j = i+qm$ et $i+qm \equiv i \mod d$
donc $i \equiv j \mod d$.

d) Dans (c) on a montrer que $Orb_\sigma(i) = Orb_\sigma(j) \Rightarrow i \equiv j \mod d$
alors si $i \not\equiv j \mod d$ donc $Orb_\sigma(i) \neq Orb_\sigma(j)$
$\Rightarrow Orb_\sigma(i) \cap Orb_\sigma(j) = \emptyset$

$\forall 1 \leq k \neq l \leq d$ $k \not\equiv l \mod d$ ce qui implique
$Orb_\sigma(k) \cap Orb_\sigma(l) = \emptyset$

D'où la réunion $Orb_\sigma(1) \cup \dots \cup Orb_\sigma(d)$ est disjoint

De plus $1 \in Orb_\sigma(1)$, $2 \in Orb_\sigma(2), \dots, d \in Orb_\sigma(d)$
$d+1 \in Orb_\sigma(1)$ car $d+1 \equiv 1 \mod d$
$n = dn' \equiv 0 \mod d$ donc $n \in Orb_\sigma(d)$
donc tout nombres entre 1 et n appartient
à l'une des orbites $Orb_\sigma(1), \dots, Orb_\sigma(d)$

D'où $Orb_\sigma(1) \cup \dots \cup Orb_\sigma(d) = \{1, \dots, n\}$

(e) Soit $\sigma \in S_N$ n cycle avec $n \geq 2$ et $m \geq 1$ Soit $\tau = \sigma^m$

- Supposons que $m | n \Rightarrow d = pgcd(m,n) = m$

d'après (b) $\forall i$ $Orb_\tau(i)$ est de longueur $\frac{n}{pgcd(m,n)} = \frac{n}{m}$

D'après d $\{1,\dots,n\} = \underbrace{Orb_\tau(1) \cup \dots \cup Orb_\tau(d)}_{d \text{ orbites}}$

mais $d = m$, donc $\tau = \sigma^m$ se décompose en m cycles de longeur $\frac{n}{m}$

- Supposons $m \wedge n = 1$, d'après (b) $Orb_\tau(i)$ est de longeur $\frac{n}{pgcd(m,n)} = \frac{n}{1} = n$

D'après (d) $\{1,\dots,n\} = Orb_\tau(1) \cup \dots \cup Orb_\tau(d)$ mais $d = 1$, donc $\{1,\dots,n\} = Orb_\tau(1)$ de longeur $\underline{\underline{n}}$.

(f) Oui, car d'après le cours on peut utiliser les conjugaisons pour changer des coordonnes de $\sigma \in S(E)$ en format $\{1,\dots,n\}$ et puis les retourner au format initial.

(g) $\sigma \in S_{25}$ de type $(12, 8, 6, 1)$

Alors les longeurs n sont

	n	12	8	6	1
les nombre de cycles	$pgcd(4,n)$	4	4	2	1
longeurs de cycles		3	2	3	1

Alors le type de σ^4 est :

$$(3, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 2, 3\ 3\ 1)$$

2

Exercice 2

(a) Déterminer le reste de la division euclidienne de $X^{96} - X^{25}$ par X^2+1

Soit $Q(X)$, on veut calculer $R(X)$ tq
$$X^{96} - X^{25} = (X^2+1)Q(X) + R(X)$$

Calculons $X^{96} - X^{25} \mod X^2+1$

$$X^2 \equiv -1 \mod X^2+1$$

$$X^{96} = (X^2)^{48} \equiv (-1)^{48} \equiv 1 \mod X^2+1$$
$$X^{25} = X^{24}X = (X^2)^{12}X \equiv (-1)^{12}X \equiv X \mod X^2+1$$
d'où $X^{96} - X^{25} \equiv 1 - X \mod X^2+1$

D'où le reste est: $1 - X = -(X-1)$

b) Déterminer $n \geq 1$ tq

$$X^3 - X^2 + X - 1 \mid (X^2-X+1)^n - X^{2n} + X^n - 1$$

$$X^3 - X^2 + X - 1 = (X^2+1)(X-1)$$

$$(X^2+1)(X-1) = X^3 - X^2 + X - 1$$

Alors les racines de $X^3 - X^2 + X - 1$ sont: $1, i, -i$

Notons $P(X) = X^3 - X^2 + X - 1$
et $Q(X) = (X^2 - X + 1)^n - X^{2n} + X^n - 1$

$P(X) \mid Q(X)$ si $Q(X) = 0$ pour toute racine de $P(X)$

$$Q(1) = (1^2 - 1 + 1)^n - (1)^{2n} + 1^n - 1$$
$$= 1^n - (1)^{2n} + 1^n - 1$$
$$= 2 - 2 = 0$$

Donc $Q(1) = 0 \quad \forall n$

$$Q(i) = (i^2 - i + 1)^n - (i^2)^n + i^n - 1$$
$$= (-1 - i + 1) - (-1)^n + i^n - 1$$
$$= (-i)^n - (-1)^n + i^n - 1 = (-i)^n + (i)^n - ((-1)^n + 1)$$

Si $n = 2n'$ $\quad (-1)^{n'} - 1 + (-1)^{n'} - 1 \qquad = i^n((-1)^n + 1) - ((-1)^n + 1)$

$= 4n''$ $\quad 1 - 1 + 1 - 1 = 0 \qquad = 0$ si $n = 2n' + 1$

$Q(i) = 0$ si $4 | n$ $\qquad$ ou $n = 4n'$

$$Q(-i) = ((-i)^2 + i + 1)^n - ((-i)^2)^n + (-i)^n - 1$$
$$= i^n - (-1)^n + (-i)^n - 1$$
$$i^n + (-i)^n - (-1)^n - 1$$
$$= i^n(1 + (-1)^n) - ((-1)^n + 1) = 0$$ si n est impair ou $4 | n$

Alors $P(X) | Q(X) \quad \forall n \in \mathbb{N}$ tq $4 | n$ ou n est impair.

Sol. TD

$$(X^2 - X + 1)^n - X^{2n} + X^n - 1 =: Q_n$$

$P | Q_n \iff X - 1 | Q_n$ et $X^2 + 1 | Q_n$ $\quad$ car $(X-1) \wedge (X^2+1) = 1$

$$Q_n(1) = 1^n - 1^{2n} + 1^n - 1 = 1 - 1 + 1 - 1 = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$Q_n \equiv (-1 - X + 1)^{2n} - (-1)^n + X^n - 1 \quad [X^2+1]$

$\equiv (-X)^n - (-1)^n + X^n - 1 \quad [X^2+1]$

$\equiv X^n(1 + (-1)^n) - (1 + (-1)^n) \quad [X^2+1]$

$\equiv (X^n - 1)(1 + (-1)^n) \quad [X^2+1]$

si n impair $Q_n \equiv 0 \ [X^2+1]$ donc $P | Q_n$

si n pair $\exists n' \in \mathbb{N}$ tq $n = 2n'$

$Q_n \equiv 2(X^{2n'} - 1) \quad [X^2+1]$

$\equiv 2((-1)^{n'} - 1) \quad [X^2+1]$

Si n' pair $\exists n'' \in \mathbb{N}$ tq $n' = 2n''$, $Q_n \equiv 0 \ [X^2 - 1]$ donc $P | Q_n$

si n' impair $Q_n \equiv -4 \ [X^2 - 1]$ donc $P \nmid Q_n$

Finalement, $P | Q_n \iff n$ impair ou $4 | n$.

Exercice 3

Soit $\mathbb{Q}[X]$ et 3 polynômes:

$$D := x^2 + 2x + 5$$
$$Q := x^5 + x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 3x - 5$$
$$P := x^6 + 4x^5 + 12x^4 + 15x^3 + 17x^2 + 3x + 20$$

a)

$$\begin{array}{l|l}
x^5 + x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 3x - 5 & x^2 + 2x + 5 \\
\hline
-\ x^5 + 2x^4 + 5x^3 & x^3 - x^2 + x - 1 \\
\quad -x^4 - x^3 - 4x^2 + 3x - 5 & \\
\quad -x^4 - 2x^3 - 5x^2 & \\
\qquad x^3 + x^2 + 3x - 5 & \\
\quad -\ x^3 + 2x^2 + 5x & \\
\qquad -x^2 - 2x - 5 & \\
\qquad -x^2 - 2x - 5 & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

Verification des calculs: $(x^3 - x^2 + x - 1)(x^2 + 2x + 5) =$

$$= x^5 - x^4 + x^3 - x^2$$
$$+ 2x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x$$
$$+ 5x^3 - 5x^2 + 5x - 5$$
$$= x^5 + x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 3x - 5$$

D'où $Q : D = x^3 - x^2 + x - 1$

b)

$$\begin{array}{l|l}
x^6 + 4x^5 + 12x^4 + 15x^3 + 17x^2 + 3x + 20 & x^2 + 2x + 5 \\
\hline
-\ x^6 + 2x^5 + 5x^4 & x^4 + 2x^3 + 3x^2 - x + 4 \\
\quad 2x^5 + 7x^4 + 15x^3 + 17x^2 + 3x + 20 & \\
\quad -\ 2x^5 + 4x^4 + 10x^3 & \\
\qquad 3x^4 + 5x^3 + 17x^2 + 3x + 20 & \\
\qquad -\ 3x^4 + 6x^3 + 15x^2 & \\
\qquad\quad -x^3 + 2x^2 + 3x + 20 & \\
\qquad\quad -\ -x^3 - 2x^2 - 5x & \\
\qquad\qquad 4x^2 + 8x + 20 & \\
\qquad\qquad -\ 4x^2 + 8x + 20 & \\
\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

$P : D = x^4 + 2x^3 + 3x^2 - x + 4$

Soit $A = x^4 + 2x^3 + 3x^2 - x + 4$ et $B = x^3 - x^2 + x - 1$

c)

$$
\begin{array}{l|l}
x^4 + 2x^3 + 3x^2 - x + 4 & x^3 - x^2 + x - 1 \\
\hline
-\ x^4 - x^3 + x^2 - x & x + 3 \\
\cline{1-1}
\quad 3x^3 + 2x^2 \quad + 4 & \\
\quad 3x^3 - 3x^2 + 3x - 3 & \\
\cline{1-1}
\qquad 5x^2 - 3x + 7 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
x^3 - x^2 + x - 1 & 5x^2 - 3x + 7 \\
\hline
x^3 - \frac{3}{5}x^2 + \frac{7}{5}x & \frac{1}{5}x + -\frac{2}{25} \\
\cline{1-1}
-\frac{2}{5}x^2 - \frac{2}{5}x - 1 & \\
-\frac{2}{5}x^2 + \frac{6}{25}x - \frac{14}{25} & \\
\cline{1-1}
-\frac{16}{25}x - \frac{11}{25} &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
5x^2 - 3x + 7 & -\frac{16}{25}x - \frac{11}{25} \\
\hline
5x^2 + \frac{55}{16}x & -\frac{125}{16}x + \frac{2575}{256} \\
\cline{1-1}
\frac{-103}{16}x + 7 & \\
\frac{-103}{1}x - \frac{1133}{256} & \\
\cline{1-1}
\frac{2925}{256} &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
-\frac{16}{25}x - \frac{11}{25} & \frac{2925}{256} \\
\hline
-\frac{16}{25}x & -\frac{4096}{73125}x - \frac{2816}{73125} \\
\cline{1-1}
-\frac{11}{25} & \\
-\frac{11}{25} & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Or $\frac{2925}{256}$ est le dernier reste non nul en divisant A par B

donc $\operatorname{pgcd}(A, B) = \frac{2925}{256}$

d) $pgcd(P, Q)$

$Q = \mathcal{D} \cdot B$ d'après (a)
$P = \mathcal{D} \cdot A$ d'après (b)
$pgcd(P, Q) = pgcd(\mathcal{D} \cdot B, \mathcal{D} \cdot A) = \mathcal{D}\, pgcd(B, A) = \mathcal{D}$ d'après (c)

On multiplie par une constante et on obtient $pgcd(A, B) = 1$

D'où $pgcd(P, Q) = \mathcal{D}$

Exercice 5

$$B(x) := \frac{(x^2-1)^2}{x(x^2+1)^3}$$

a) Le dénominateur est sous forme décomposé en facteurs irréductibles, de plus le degré de dénominateur est supérieur à celui de nominateur, donc le théorème du cours s'applique:

$$B(x) = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{(x^2+1)^3} + \frac{b'x+c'}{(x^2+1)^2} + \frac{b''x+c''}{x^2+1}$$

où $a, b, c, b', c', b'', c''$ sont des inconnues à déterminer.

b)

$$B(-x) = -\frac{(x^2-1)^2}{x(x^2+1)^3} = -B(x)$$

Alors $B(-x) + B(x) = 0$

$$\Rightarrow -\frac{a}{x} + \frac{-bx+c}{(x^2+1)^3} + \frac{-b'x+c'}{(x^2+1)^2} + \frac{-b''x+c''}{(x^2+1)} + \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{(x^2+1)^3} + \frac{b'x+c'}{(x^2+1)^2} + \frac{b''x+c''}{(x^2+1)} = 0$$

$$\frac{2c}{(x^2+1)^3} + \frac{2c'}{(x^2+1)^2} + \frac{2c''}{(x^2+1)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{c}{(x^2+1)^3} + \frac{c'}{(x^2+1)^2} + \frac{c''}{x^2+1} = \frac{-c}{(x^2+1)^3} + \frac{-c'}{(x^2+1)^2} + \frac{c''}{x^2+1}$$

Mais d'après le cours, la décomposition est unique, ce qui donne
$c = -c \quad c' = -c' \quad c'' = -c'' \Rightarrow c = c' = c'' = 0$

c) Alors on obtient :

$$B(x) = \frac{a}{x} + \frac{bx}{(x^2+1)^3} + \frac{b'x}{(x^2+1)^2} + \frac{b''x}{(x^2+1)}$$

On multiplie par x et on obtient

$$\frac{(x^2-1)^2}{(x^2+1)^3} = a + \frac{bx^2}{(x^2+1)^3} + \frac{b'x^2}{(x^2+1)^2} + \frac{b''x^2}{x^2+1}$$

Posons $x=0$:

$$\underline{1 = a}$$

d) Alors on obtient:

$$B(x) = \frac{1}{x} + \frac{bx}{(x^2+1)^3} + \frac{b'x}{(x^2+1)^2} + \frac{b''x}{(x^2+1)}$$

Multiplions par $(x^2+1)^3$

$$\frac{(x^2-1)^2}{x} = \frac{(x^2+1)^3}{x} + bx + b'x(x^2+1) + b''x(x^2+1)^2$$

On pose $x = i$ $\quad (i^2+1) = (-1+1) = 0$

$$\frac{(-2)^2}{i} = 0 + bi$$

$$\frac{4}{i^2} = b = \frac{4}{-1} = -4$$

Donc $b = -4$

Donc on obtient :

$$B(x) = \frac{1}{x} - \frac{4x}{(x^2+1)^3} + \frac{b'x}{(x^2+1)^2} + \frac{b''x}{(x^2+1)}$$

e) Soit $f(x) := \frac{(x^2-1)^2}{x(x^2+1)^3}$

$$\lim_{x \to +\infty} x f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{(x^2-1)^2}{(x^2+1)^3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^4-2x^2+1}{x^6+3x^4+3x^2+1} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} x B(x) = \lim_{x \to +\infty} 1 - \frac{4x^2}{(x^2+1)^3} + \frac{b'x^2}{(x^2+1)^2} + \frac{b''x^2}{x^2+1}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} 1 - 0 + 0 + \frac{b''+}{1+\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} 1 - 0 + 0 + b'' = 0$$

D'où $1 + b'' = 0 \Rightarrow b'' = -1$

Donc on obtient

$$B(x) = \frac{(x^2-1)^2}{x(x^2+1)^3} = \frac{1}{x} - \frac{4x}{(x^2+1)^3} + \frac{b'x}{(x^2+1)^2} - \frac{x}{x^2+1}$$

f) $$\frac{(x^2-1)^2}{x(x^2+1)} = \frac{(x^2+1)^2}{x} - \frac{4x}{x^2+1} + b'x - (x^2+1)x$$

$$0 = 4 - 2 + b' - 2$$

$$\underline{0 = b'}$$

Donc le résultat finale est :

$$B(x) = \frac{(x^2-1)^2}{x(x^2+1)^3} = \frac{1}{x} - \frac{4x}{(x^2+1)^3} - \frac{x}{x^2+1}$$

g) $(x^2-1)^2 = x^4 - 2x^2 + 1$

$$\frac{x^4-2x^2-x+1}{x(x^2+1)^3} = \frac{(x^2-1)^2-x}{x(x^2+1)^3} = \frac{(x^2-1)^2}{x(x^2+1)^3} - \frac{x}{x(x^2+1)^3}$$

$$= B(x) - \frac{1}{(x^2+1)^3}$$

D'après les questions précédentes:

$$\frac{x^4-2x^2-x+1}{x(x^2+1)^3} = \frac{1}{x} - \frac{4x}{(x^2+1)^3} - \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{(x^2+1)^3}$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{4x+1}{(x^2+1)^3} - \frac{x}{x^2+1}$$

Exercice 6

a) $$A(x) = \frac{x}{x^4+x^2+1} = \frac{x}{(x^2+1)^2-x^2} = \frac{x}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}$$

$(2x^2+2)^2 = 4x^4+8x^2+4 \quad - 3(x^2+1)^2$

$4(x^4+2x^2+1 \quad\quad 3x^4+6x^2+3 \quad\quad -x^2$

$4(x^2+1)^2$

$4(x^2+1)^2 - 3(x^2+1)^2 - x^2$

$= (x^2+1)^2 - x^2 = (x^2+1-x)(x^2+1+x)$

D'après le théorème du cours de décomposition

$$A(x) = \frac{x}{x^4+x^2+1} = \frac{x}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)} = \frac{ax+b}{x^2+x+1} + \frac{cx+d}{x^2-x+1}$$

avec a, b, c, d des réels à déterminer.

Multiplions par (x^2+x+1)

$$\frac{x}{x^2-x+1} = ax+b + \frac{(cx+d)(x^2+x+1)}{x^2-x+1}$$

$$0 = b + (d)(1) = b+d \Rightarrow d = -b$$

$$A(x) = \frac{x}{x^4+x^2+1} = \frac{x}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)} = \frac{ax+b}{x^2+x+1} + \frac{cx+d}{x^2-x+1}$$

$$x = (ax+b)(x^2-x+1) + (cx+d)(x^2+x+1)$$

$$x = ax^3+bx^2-ax^2-bx+ax+b + cx^3+dx^2+cx^2+dx+cx+d$$
$$= (a+c)x^3 + (-a+b+c+d)x^2 + (a-b+c+d)x + (b+d)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = a+c \\ 0 = -a+b+c+d \\ 1 = a-b+c+d \\ 0 = b+d \end{cases} = \begin{array}{c} \begin{matrix} a & b & c & d & \; & 2 \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow (L_2+L_1-L_4)\frac{1}{2} \\ L_3 \leftarrow (L_3+L_4-L_1)\frac{1}{2} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_3 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} a & b & c & d \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right] \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} b = -\frac{1}{2} \\ d = \frac{1}{2} \\ a = c = 0 \end{array}$$

D'où : $\dfrac{x}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)} = \dfrac{-\frac{1}{2}}{x^2+x+1} + \dfrac{\frac{1}{2}}{x^2-x+1} = A(x)$

b) Il faut montrer que

$p := x^2+\lambda x+\mu \iff \exists\, \alpha \quad \alpha^2+\lambda\alpha+\mu = 0$

$\exists\, Q(x), Q'(x) \quad p = Q(x)Q'(x)$

$\Rightarrow)$ Soit $p := x^2+\lambda x+\mu$ sur $\mathbb{K}$ réductible. Or $\deg(2) = 2$

donc la seule possibilité de décomposition est : $\deg(Q(x)) = \deg(Q'(x)) = 1$

donc $Q(x) = (x-\alpha)$ $\quad Q'(x) = (x-\beta)$

où $p = (x-\alpha)(x-\beta)$ et de plus les polynomes de degré 1 sont irréductibles.

Si on pose $p(\alpha) = (\alpha-\alpha)(\alpha-\beta) = 0$

donc par définition, α est une racine de p !

$\Leftarrow$ Soit $p := x^2 + \lambda x + \mu$ et on suppose que $\exists \alpha \in \mathbb{K}$ tq $p(\alpha) = 0$

D'après le cours, si α est une racine de p alors p se décompose comme $p = (x-\alpha)Q(x)$ où $Q(x)$ un polynôme sur $\mathbb{K}$
par contre $\deg(p) = \deg((x-\alpha)) + \deg(Q(x))$
$\Leftrightarrow \quad 2 = 1 + \deg(Q(x))$
$\Rightarrow \deg(Q(x)) = 2-1 = 1$
donc $Q(x)$ est aussi de la forme $(x-\beta) = Q(x)$
mais les polynômes de degré 1 sont irreductible.

Donc $p = (x-\alpha)(x-\beta)$ ce qui est une décomposition.
donc p réductible.

c) $(x^2+\bar{4}) \equiv (x^2 - \bar{1}) \quad [5]$
$\equiv (x-\bar{1})(x+1) \quad [5]$

Mais $(x^2+\bar{3}) = (x^2 - \bar{2})$ n'a pas de racines, d'après B) cela signifie que $(x^2+\bar{3})$ est irreductible.

d) Soit $A(x) = \dfrac{x-\bar{2}}{(x^2+\bar{4})(x^2+\bar{3})} \in F_{\mathbb{K}}[x]$ où $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$

D'après c) $A(x) = \dfrac{x-\bar{2}}{(x-\bar{1})(x+\bar{1})(x^2+3)}$

Où tous les facteur au dénominateur et nominateur sont irreductibles (d'après c) et $\deg(1) \Rightarrow$ irreductible)

degré de nominateur est inférieur à celui de dénominateur
ce qui, d'après le théorème du cours nous permet à décomposer ce polynome:

$$A(x) = \frac{x-\bar{2}}{(x-\bar{1})(x+\bar{1})(x^2+3)} = \frac{ax+b}{x^2+\bar{3}} + \frac{c}{x-\bar{1}} + \frac{d}{x+\bar{1}}$$

avec a, b, c, d des inconnues à déterminer

$$A(x) = \frac{x-\bar{2}}{(x-\bar{1})(x+\bar{1})(x^2+\bar{3})} = \frac{ax+b}{x^2+\bar{3}} + \frac{c}{x-\bar{1}} + \frac{d}{x+\bar{1}}$$

$$\Rightarrow x-\bar{2} = (ax+b)(x-\bar{1})(x+\bar{1}) + c(x^2+\bar{3})(x+\bar{1}) + d(x-\bar{1})(x^2+\bar{3})$$

$$\begin{aligned} &= (ax+b)(x^2+\bar{4}) + cx^3 + cx^2 + \bar{3}cx + \bar{3}c \\ &\quad + dx^3 + \bar{3}dx - dx^2 - \bar{3}d \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \underline{ax^3} + \underline{\bar{4}ax} + \underline{bx^2} + \underline{4b} + \underline{cx^3} + \underline{cx^2} + \underline{\bar{3}cx} + \underline{\bar{3}c} \\ &\quad + \underline{dx^3} + \underline{\bar{3}dx} \underline{- dx^2} - \underline{\bar{3}d} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x = x^3(a+c+d) + x^2(b+c-d) + x(\bar{4}a+\bar{3}c+\bar{3}d) + (\bar{4}b+\bar{3}c-\bar{3}d+\bar{2})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = a+c+d \quad \Rightarrow \quad a = -c-d \\ 0 = b+c-d \\ 1 = \bar{4}a+\bar{3}c+\bar{3}d = -\bar{4}c-\bar{4}d+\bar{3}c+\bar{3}d = -c-d \\ 0 = \bar{4}b+\bar{3}c-\bar{3}d+\bar{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ 1 = -c-d \quad \Rightarrow \quad -d = 1+c \\ 0 = b+c-d \quad \Rightarrow 0 = b+c+1+c = b+2c+1 \quad \Rightarrow \quad b+2c = -1 \\ 1 = \bar{4}+\bar{3}c+\bar{3}d \\ 0 = \bar{4}b+\bar{3}c-\bar{3}d+2 \end{cases}$$

$$1 = \bar{4}b+\bar{1}c+\bar{1} \Rightarrow \begin{cases} \bar{4}b+c = 0 \\ b+2c = -1 \end{cases} \begin{aligned} &\Rightarrow -\bar{7}b = -\bar{1} \\ &\Rightarrow \bar{7}b = \bar{1} \\ &\Rightarrow \bar{2}b = \bar{1} = -\bar{4} \\ &\Rightarrow b = -\bar{2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \qquad b = -\bar{2} \\ 0 = \bar{4}+\bar{3}c-\bar{3}d \\ 1 = \bar{4}+\bar{3}c+\bar{3}d \\ \\ 1 = -c-d \Rightarrow -1-c = d \Rightarrow -\bar{1}+\bar{2} = d = \bar{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} &\bar{1} = \bar{8}+\bar{6}c \\ &\bar{1} = \bar{3}+\bar{c} \Rightarrow c = -\bar{2} = \bar{3} \end{aligned}$$

$$a = \bar{1} \qquad b = \bar{3} \qquad c = \bar{3} \qquad d = \bar{1}$$

$$A(x) = \frac{x+\bar{3}}{x^2+\bar{3}} + \frac{\bar{3}}{x-\bar{1}} + \frac{\bar{1}}{x+\bar{1}}$$

$$= \frac{x+\bar{3}}{x^2+\bar{3}} + \frac{\bar{3}}{x+\bar{4}} + \frac{\bar{1}}{x+\bar{1}}$$