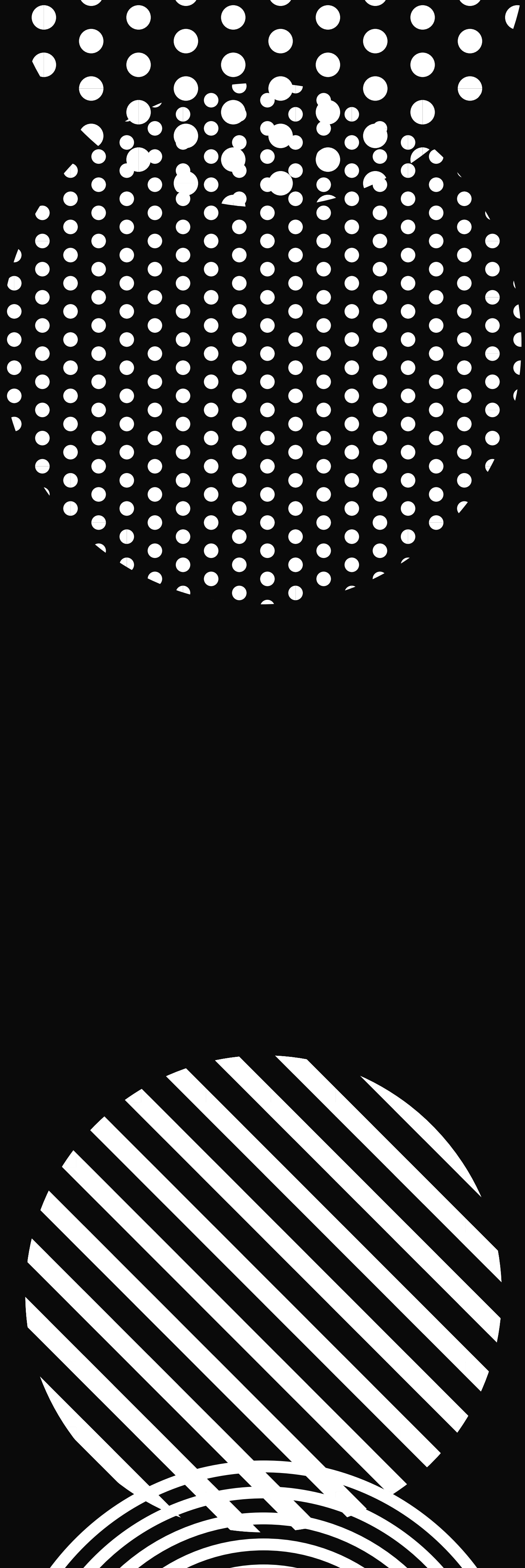

Polynômes: A anneau intègre ($ab=0 \Rightarrow a=0$ ou $b=0$)

$A[X]$ = anneaux de polynômes en X à coeff' dans A
$= \{\underbrace{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n}_{=:p} : n \geq 0,\ a_i \in A\}$

$p+q$

Déf abstraite: $p = (a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ avec les $a_i = 0$
à partir d'un certain rang

pas de x
pas de fonctions

Manipuler algébriquement ces $p(x)$ sans penser "fonctions"

$p = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$ nb fini de termes
$q = b_0\ \ b_1x + b_2x^2 + \dots$

$p + 0 = p$ $\ \ 0 \in A \quad 0_{A[X]} = 0_A$

alors:

$p+q = a_0+b_0 + (a_1+b_1)x + (a_2+b_2)x^2 + \dots$ + commutative
$p\cdot q = a_0b_0 + (a_1b_0 + a_0b_1)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \dots$ × commutativ
$p\cdot 1 = p \quad 1_{A[X]} = 1_A$ car A commutatif

CCL: $A[X]$ est un anneau

Déf: $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ avec $a_n \neq 0$ $\deg p = n$
$p(x) = a_0 \in A \setminus \{0\}$ $\deg p = 0$
$\deg 0 = -\infty$

Prp: $p = a_0 + \dots + \overset{\neq 0}{a_n}x^n$
$q = b_0 + \dots + \overset{\neq 0}{b_m}x^m \Rightarrow \deg pq = (\deg p) \deg(q) = m+n$

pv: $(a_0 + \dots + a_nx^n)(b_0 + \dots + b_mx^m) = \dots + a_nb_mx^{m+n}$

A intègre $a_n \neq 0 \neq b_m \Rightarrow a_nb_m \neq 0$

CEX: $A := \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$

$p := \bar{2}X + \bar{1}$ $\quad \deg p = 1$

$q := \bar{3}X^2 + \bar{1}$ $\quad \deg q = 3$

$pq = (\bar{2}X + 1)(\bar{3}x^2 + \bar{1})$

$= \bar{0}X^3 + \bar{3}X^2 + \bar{2}X + \bar{1}$

$\deg pq = 2 < \deg p + \deg q = 1 + 2$

Thm: A intègre $\Rightarrow$ $\overset{\text{anneau}}{A[X]}$ intègre

pv: $(p \neq 0$ et $q \neq 0) \overset{?}{\Rightarrow} pq \neq 0$

Écrire $p = \underbrace{a_0 + a_1 x + \dots + a_{h-1}x^{h-1}}_{0} + \overset{\neq 0}{a_h} x^h + a_{h+1}x^{h+1} + \dots + \overset{\neq 0}{a_n} x^n$

$n = \deg p$

Déf: Valuation $\quad val(p) = \min_{i} a_i \neq 0 =: h$

le plus petit i tq $a_i \neq 0$ $\quad$ le plus grand i tq $a_i \neq 0$

$(0, 0, \dots, 0, \underset{val(p)}{a_m}, \dots, \underset{\deg p}{a_n}, 0, \dots, 0, \dots)$

OPS $\quad p = \overset{\neq 0}{a_h} x^h + \dots + \overset{\neq 0}{a_n} x^n$

Intégrité équivaut à $(pq = 0$ et $p \neq 0) \overset{?}{\Rightarrow} (q = 0)$

$val\ 0 = \infty$

$q = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots$

$pq = (a_h b_0)x^h + (a_h b_1 + a_{h+1} b_0) + (a_h b_2 + a_{h+1} b_1 + a_{h+2} b_0)X^{h+2} + \dots = 0$

$\Rightarrow \overset{\neq 0}{a_h} b_0 = 0 \Rightarrow b_0 = 0$ car A intègre

$\overset{\neq 0}{a_h} b_1 + \underbrace{a_{h+1} b_0}_{0} = 0 \Rightarrow b_1 = 0$

$\overset{\neq 0}{a_h} b_2 + \underbrace{a_{h+1} b_1}_{0} + \underbrace{a_{h+2} b_0}_{0} = 0 \Rightarrow b_2 = 0$ $\quad$ $b_i = 0\ \forall i$ $\quad q = 0$ □

$A := \mathbb{K}$ un corps commutatif

Thm: Pour $a, b \in \mathbb{K}[X]$ avec $b \neq 0$, il existe $q, r \in \mathbb{K}[X]$ uniques tq

$$\begin{cases} a = qb + r \\ \deg q > \deg p \end{cases}$$

Ex: $3X^4 + 2X^3 + X + 5 = \underbrace{(3X^2 - 4X - 1)}_{a}\underbrace{(X^2 + 3X + 3)}_{b} + \underbrace{15X + 8}_{r}$

$\rightarrow \deg(p+q) \leq \max(\deg p, \deg q)$
$\text{val}(p+q) \geq \min(\deg p, \deg q)$

$p = (a_0, a_1, \dots)$ $\qquad$ $p+q = (a_0+b_0, a_1+b_1, a_2+b_2, \dots)$
$q = (b_0, a_1, \dots)$

Déf: $p = (a_0, a_1, \dots) \in A[X]$ et $\underset{}{\overset{\text{nombre}}{\lambda}} \in A$

$\lambda p = (\lambda a_0, \lambda a_1, \dots)$

Prop: si $\mathbb{K}$ un corps, $\mathbb{K}[X]$ espace vectoriel

Introduisons: $u_n = (\underset{0}{0}, \underset{1}{0}, \dots, \underset{n-1}{0}, \underset{n}{1}, \underset{n+1}{0}, \dots)$

où $u_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$u_n u_m = u_{n+m}$; $(u_n)^k = u_{nk}$

Tout polynôme $p = (a_0, a_1, \dots)$
peut être écrit comme une combinaison linéaire

$p = a_0 u_0 + a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots$

Prop-Déf: $p = (a_0, a_1, \dots)$
$q = (b_0, b_1, \dots)$

$pq = (c_0, c_1, c_2, \dots)$ où $c_i = a_0 b_i + a_1 b_{i-1} + \dots + a_i b_0$
$= \sum_{0 \leq k \leq i} a_i b_{k-i}$

Prop: Soient $p, q \in A[X]$
(1) $pq = qp$
(2) $pe = p$
(3) $(pq)z = p(qz)$
(4) $(p+q)z = pz + qz$

Prop: A anneau $\Rightarrow A[X]$ anneau
A intègre $\Rightarrow A[X]$ intègre

Prop: $\deg(pq) = \deg p + \deg q$; $\text{val}(pq) = \text{val}\, p + \text{val}\, q$

$\deg(p+q) \leq \max(\deg p, \deg q)$

$\deg(p \cdot q) = \deg(p) + \deg q$