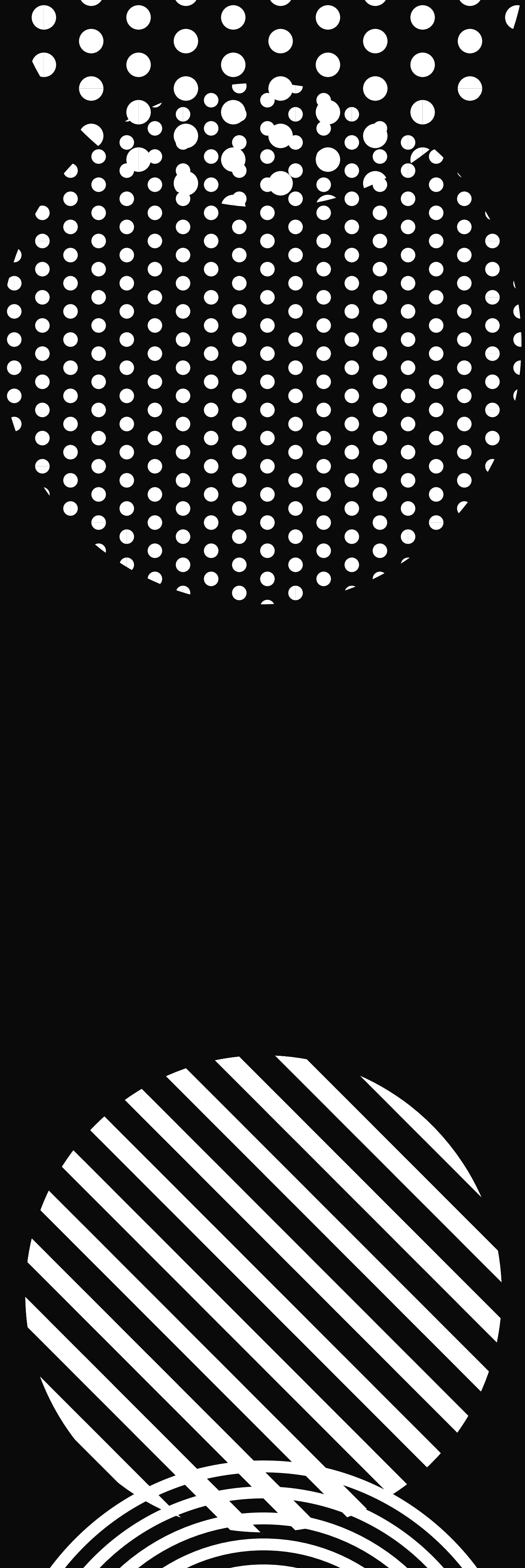


On peut décomposer chaque polynôme

Thm: $\forall\, p(X) \overset{\neq 0}{\in} \mathbb{C}[X]$ $\quad p(X) = \lambda(X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_n)$ $\quad n = \deg p$ $\quad \lambda \in \mathbb{C}^*$

$\Downarrow$

Thm: $\forall\, p(X)^{\neq 0} \in \mathbb{R}[X]$ $\quad p(X) = \lambda \prod_{i=1}^{2} (x + a_i) \prod_{j=1}^{s} (x^2 + b_j x + c_j)$ $\quad \lambda \in \mathbb{R}^*$

$a, b, c \in \mathbb{R}$

$b_j^2 - 4c_j < 0 \quad \forall j$

CCL: Décomposition en FRACTIONS des polynômes à coeffs. $\mathbb{C}, \mathbb{R}$

$\frac{p(x)}{q(x)} \in \mathbb{F}_{\mathbb{K}}(X)$ fractions $\quad$ OPS $p \wedge q = 1$ $\quad p = d\,p_1$

sinon $d = \mathrm{pgcd}(p, q)$ $\quad q = d\,q_1$ $\quad p_1 \wedge q_1 = 1$

coeffs $\in \mathbb{K}$ $\quad q \neq 0$

$$\frac{p}{q} = \frac{d\,p_1}{d\,q_1} = \frac{p_1}{q_1} \qquad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

<u>Voir</u> $\frac{a(x)}{b(x)}$ si $\deg a \geq \deg b$

Euclide $\quad \frac{a = bq + r}{b}$

partie entière

$$\frac{a}{b} = \boxed{q} + \boxed{\frac{r}{b}}$$

$\deg r < \deg b$

$\frac{17}{5} = 3 + \frac{2}{5}$ $\quad q =$ partie entière de $\frac{a(x)}{b(x)}$ fraction.

si $\mathrm{pgcd}(a, b) = 1 \overset{\text{vu}}{=} \mathrm{pgcd}(b, r)$

CCL: la fraction simplifiée $\frac{r}{b}$ est encore irréductible

Thm: Si $\frac{r(X)}{b(X)} \in F_{\mathbb{K}}[X]$ fraction, $r \in \mathbb{K}[X]$, $b \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$, HYP
$\deg r < \deg b$
$1 = b \wedge a$

Si $b = \overbrace{b_1 b_2 \dots b_n}^{\text{décomposition}}$ avec $b_i \in \mathbb{K}[X]$ $b_{i_1} \wedge b_{i_2} = 1$ $\forall\ 1 \le i_1 \ne i_2 \le n$
Alors $\exists\, r_1, \dots, r_n \in \mathbb{K}[X]$ $\deg r_1 < \deg b_1, \dots, \deg r_n < \deg b_n$ tq
$r_1 \wedge b_1 = 1, \dots, r_n \wedge b_n = 1$

$$\frac{r}{b} = \frac{r}{b_1 \cdots b_n} = \frac{r_1}{b_1} + \frac{r_2}{b_2} + \dots + \frac{r_n}{b_n}$$ unique décomposition

pv n = 2: $b = b_1 b_2$ $1 = b_1 \wedge b_2$

Bézout $\exists\, v_1, v_2 \in \mathbb{K}[X]$ tq $(v_2 b_1 + v_1 b_2 = 1)\, r$ de r de $\frac{r}{b_1 b_2}$

$$\Rightarrow \underbrace{v_2 r}_{=:u_2} b_1 + \underbrace{v_1 r}_{=:u_1} b_2 = r$$

$$\frac{\overset{RPL}{u_2} b_1 + \overset{RPL}{u_1} b_2 = r}{b_1 b_2}$$ PAS SI VITE

Euclidiniser $u_1 = b_1 q_1 + r_1$ $\deg r_1 < \deg b_1$
$u_2 = b_2 q_2 + r_2$ $\deg r_2 < \deg b_2$

RPL: $(b_2 q_2 + r_2) b_1 + (b_1 q_1 + r_1) b_2 = r$
$$\underbrace{\underbrace{b_1 b_2 (q_1 + q_2)}_{I} + \underbrace{r_2 b_1 + r_1 b_2}_{II}}_{b_1 b_2} = r$$

Lm: En fait $q_1 + q_2 = 0$
pv: Si $q_1 + q_2 \neq 0$ $\deg(q_1 + q_2) \geq 0$
alors
$$\deg \overset{I}{b_1 b_2 (q_1 + q_2)} \geq \deg b_1 + \deg b_2$$

MAIS PAR AILLEURS
$$\boxed{\deg(r_2 b_1 + r_1 b_2) < \deg b_1 + \deg b_2}$$
$\Rightarrow$ deg membre gauche $\geq$ deg $\underset{I}{1^{er}}$ terme $\geq \deg b_1 + \deg b_2$

Mais par hyp $\deg r < \deg b = \deg b_1 b_2 = \deg b_1 + \deg b_2$
Contradiction $\deg b \le \deg(I + II) = \deg r < \deg b$ CCL: $q_1 + q_2 = 0$ □

Expl: $\deg(r_2 b_1) \le \deg r_2 + \deg b_1 < \deg b_2 + \deg b_1$
$\deg(r_1 b_1) \le \deg r_1 + \deg b_1 < \deg b_1 + \deg b_2$

Fin: $\frac{r_2 b_1 + r_1 b_2}{b_1 b_2} = \frac{r_2}{b_2} + \frac{r_1}{b_1} = \frac{r}{b_1 b_2}$ $\quad r_i \wedge b_i \overset{?}{=} 1$

Lm: On a $r_i \wedge b_i = 1$ pour $i = 1,2$

pv: Suffit mq $r_1 \wedge b_1 = 1$, pareil pour $i=2$

Soit $d := \mathrm{pgcd}(r_1, b_1)$. Alors, $d \mid r_1$ et $d \mid b_1$ $\quad$ Rappel: $0 + r_2 b_1 + r_1 b_2 = r$

$d \mid b_1 \Rightarrow d \mid b_1 b_2 \Rightarrow d \mid r$

$\Rightarrow d \mid b$

donc $d \mid \underbrace{\mathrm{pgcd}(b, r)}_{=1 \text{ HYP}}$

donc $d \mid 1$

donc $d = 1$ $\square$

CCL: $\frac{r}{b_1 b_2}$ avec $r \wedge b_1 b_2 = 1$ on a trouvé r_1, r_2 tq $\frac{r}{b_1 b_2} = \frac{r_1}{b_1} + \frac{r_2}{b_2}$ et $r_i \wedge b_i = 1$ où $i = 1,2$

Unicité: $\left(\frac{r_1}{b_1} + \frac{r_2}{b_2} = \frac{r}{b_1 b_2} = \frac{r_1'}{b_1} + \frac{r_2'}{b_2} \right) b_1 b_2$

$\Rightarrow r_1 b_2 + r_2 b_1 = r_1' b_2 + r_2' b_1$

$\Rightarrow (r_1 - r_1') b_2 = (r_2' - r_2) b_1$ $\quad$ HYP: $1 = b_1 \wedge b_2$

Gauss: $\left.\begin{array}{l} b_1 \mid (r_1 - r_1') b_2 \\ b_1 \wedge b_2 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow b_1 \mid r_1 - r_1'$

Mais $\deg r_1 < \deg b_1$ et $\deg r_1' < \deg b_1$

$\Rightarrow \deg(r_1 - r_1') < \deg b_1$

$\Rightarrow r_1 - r_1' = 0$ donc $r_2' - r_2 = 0$

$n=3$: $\frac{r}{b_1 b_2 b_3} = \frac{r_1}{b_1} + \frac{s_2}{b_2 b_3} = \frac{r_1}{b_1} + \frac{r_2}{b_2} + \frac{r_3}{b_3}$ $\square$

Thm: Tout $B \in \mathbb{K}[X]_1$ se décompose en fact irr.

$$B = \overset{\text{irr } B_1}{p_1^{h_1}} \, \overset{\text{irr } B_2}{p_2^{h_2}} \cdots \overset{\text{irr } B_n}{p_n^{h_n}}$$

$h_1, \dots, h_n \geq 1$
$p_1, \dots, p_n \in \mathbb{K}[X]_1$
irr. et distincts.

Cor:
$$\frac{r}{p_1^{h_1} p_2^{h_2} \cdots p_n^{h_n}} = \frac{r_1}{p_1^{h_1}} + \frac{r_2}{p_2^{h_2}} + \dots + \frac{r_n}{p_n^{h_n}} \qquad \deg r_i < \deg p_i^{h_i}$$

ON PEUT MIEUX

Prop: Toute fraction $\frac{r}{p^h}$ avec $\deg r < \deg p^h = h \deg p$
avec $p \in \mathbb{K}[X]_1$ irréductibles

PAS BESOIN DE $r \wedge p^h = 1$

se décompose uniquement

$$\frac{r}{p^h} = \frac{T_h}{p^h} + \frac{T_{h-1}}{p^{h-1}} + \dots + \frac{T_2}{p^2} + \frac{T_1}{p} \quad \text{avec } T_i \in \mathbb{K}[X]$$
tq $\deg T_i < \deg p$

pv: $h=1$ OK!

Hyp rec:
$$\frac{q}{p^{h-1}} = \frac{T_{h-1}}{p^{h-1}} + \dots + \frac{T_1}{p^1}$$

Passer à $\frac{r}{p^h} = ?$ Euclidiviser r par p

$$r = \frac{pq + T_h}{p^h} \qquad \deg T_h < \deg p$$

$$\Rightarrow \frac{r}{p^h} = \frac{q}{p^{h-1}} + \frac{T_h}{p^h} = \underbrace{\frac{T_{h-1}}{p^{h-1}} + \dots + \frac{T_1}{p^1}}_{\text{REC}} + \frac{T_h}{p^h}$$

Unicité div euclidienne $\Rightarrow$ unicité $T_h, \dots, T_1$ $\square$

Thm*7 : Dans $F_{\mathbb{K}}[X]$. Toute $\frac{a}{b} = \frac{a}{p_1^{h_1} p_2^{h_2} \dots p_n^{h_n}}$ avec p_i irréductibles distincts,

$b \in \mathbb{K}[X]_1$ avec $a \wedge b = 1$

$h_i \geq 1$ se décompose uniquement

$\frac{a}{b} = q + \frac{r}{b}$

Partie entière

$$\frac{a}{b} = q + \frac{\alpha_{h_1}}{p_1^{h_1}} + \frac{\alpha_{h_1-1}}{p_1^{h_1-1}} + \dots + \frac{\alpha_1}{p_1^1}$$ avec $\deg \alpha_i < \deg p_1$

$$+ \frac{\beta_{h_2}}{p_2^{h_2}} + \frac{\beta_{h_2-1}}{p_2^{h_2-1}} + \dots + \frac{\beta_1}{p_2^1}$$ $\deg \beta_i < \deg p_2$

$$+ \dots\dots$$

$$+ \frac{\lambda_{h_n}}{p_n^{h_n}} + \frac{\lambda_{h_n-1}}{p_n^{h_n-1}} + \dots + \frac{\lambda_1}{p_n^1}$$ $\deg \lambda_i < \deg p_n$

Thm - Coz. Sur $\mathbb{C} = \mathbb{K}$

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{(x-\alpha_1)^{h_1}(x-\alpha_2)^{h_2}\dots(x-\alpha_n)^{h_n}}$$

$$= q + \frac{a_{1,h_1}}{(x-\alpha_1)^{h_1}} + \dots + \frac{a_{1,1}}{x-\alpha_1}$$ $a_{1,i} \in \mathbb{C}$

$$+ \dots\dots$$

$$+ \frac{a_{n,h_n}}{(x-\alpha_n)^{h_n}} + \dots + \frac{a_{n,1}}{x-\alpha_n}$$ $a_{n,i} \in \mathbb{C}$

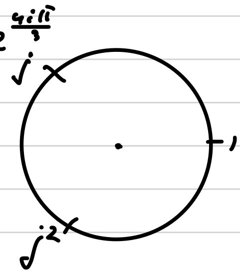
Ex : $X^3 - 1 = (X-1)(X^2+X+1) = (X-1)(X-j)(X-j^2)$ $\quad j = e^{\frac{2i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$

$1^3 = 1 \quad j^3 = 1 \quad (j^2)^3 = 1$

$$\frac{1}{X^3-1} = \frac{1}{(X-1)(X-j)(X-j^2)}$$

$$(X-1)\cdot \quad = 0 + \frac{\lambda}{X-1} + \frac{\mu}{X-j} + \frac{\nu}{X-j^2}$$

$j^2 = e^{\frac{4i\pi}{3}}$



$$\frac{1}{(X-j)(X-j^2)} = \lambda + (X-1)(\dots) \quad \Big| \; X := 1$$

$$\frac{1}{(X-j)(X-j^2)} = \lambda + 0 \iff \frac{1}{3} = \lambda$$ EXO $\quad \mu = \frac{1}{3} j \quad \nu = \frac{1}{3}\bar{j}$

EX: $\frac{4}{(X^2+1)^2}$ sur $\mathbb{C}$ $\quad \frac{4}{((X-i)(X+i))^2} = \frac{4}{(X-i)^2(X+i)^2}$

(exam) THM

$$= \frac{\lambda_2}{(X-i)^2} + \frac{\lambda_1}{(X-i)} + \frac{\mu_2}{(X+i)^2} + \frac{\mu_1}{(X+i)}$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ existent, sont uniques, mais à calculer !

Conjuguer $\frac{4}{(X^2+1)^2} = \frac{\bar{\lambda}_2}{(X+i)^2} + \frac{\bar{\lambda}_1}{(X+i)} + \frac{\bar{\mu}_2}{(X-i)^2} + \frac{\bar{\mu}_1}{X-i}$

donc = Et les coeffs sont uniques

Par identification $\bar{\mu}_2 = \lambda_2 \quad \bar{\mu}_1 = \lambda_1$

Donc $\left(\frac{4}{(X^2+1)^2} = \frac{\lambda_2}{(X-i)^2} + \frac{\lambda_1}{X-i} + \frac{\bar{\lambda}_2}{(X+i)^2} + \frac{\bar{\lambda}_1}{X+i}\right)(X-i)^2$

$$\frac{4}{(X+i)^2} = \lambda_2 + \lambda_1(X-i) + \frac{\bar{\lambda}_2(X-i)^2}{(X+i)^2} + \frac{\bar{\lambda}_1(X-i)^2}{X+i} \quad \Big| \; X := i$$

$$\frac{4}{(2i)^2} = \lambda_2 + 0$$

⚠ MULT PAR $(X-i)^2$ ECHEC

$$\frac{4}{(X-i)(X+i)^2} = \frac{\lambda_2}{X-i} + \lambda_1 + (X-i)(\dots)$$

Thm-Cor :

$$B = \prod_{i=1}^{r} (X+a_i)^{g_i} \prod_{j=1}^{s} (X^2 + B_j X + C_j)$$

Sur $\mathbb{R}$

$$\frac{A}{B} = q + \sum_{i=1}^{r} \sum_{1 \le g_i' \le g_i} \frac{T_i^{g_i'}}{(X+a_i)^{g_i'}} + \sum_{j=1}^{s} \sum_{1 \le h_j' \le h_j} \frac{\mu_j^{h_j'} + V_j^{h_j'} X}{(X^2+B_j X + C_j)^{h_j'}}$$

coeffs à déterminer dans les applications T_i, μ_i, V_i

Ex: $\dfrac{X^5+2}{(X^2+X+1)^3} = \dfrac{aX+b}{(X^2+X+1)^3} + \dfrac{cX+d}{(X^2+X+1)^2} + \dfrac{eX+f}{X^2+X+1}$

$1^2-4<0$

IRR

$a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ à déterminer

Ex: $\left(\dfrac{4}{(X^2-1)^2} \overset{\text{THM}}{=} \dfrac{\lambda_2}{(X-1)^2} + \dfrac{\lambda_1}{X-1} + \dfrac{\mu_2}{(X+1)^2} + \dfrac{\mu_1}{X+1}\right) \begin{matrix}(X-1)^2 \\ (X+1)^2\end{matrix}$

inconnues $\lambda_2, \lambda_1, \mu_2, \mu_1$ à déterminer

$X \longmapsto -X$ $\qquad \dfrac{4}{(X^2-1)^2} = \dfrac{\lambda_2}{(X-1)^2} - \dfrac{\lambda_1}{X-1} + \dfrac{\mu_2}{(X+1)^2} + \dfrac{\mu_1}{X+1}$

Unicité $\mu_2 = \lambda_2 \qquad \mu_1 = -\lambda_1$

Donc: $\left(\dfrac{4}{(X^2-1)^2} = \dfrac{\lambda_1}{(X-1)^2} + \dfrac{\lambda_1}{X-1} + \dfrac{\lambda_2}{(X+1)^2} - \dfrac{\lambda_1}{X+1}\right.$ que 2 inconnues $\Big)$ $(X-1)^2$

$\dfrac{4}{(X+1)^2} = \lambda_2 + (X-1)(\dots) \Big| \; X := 1$

$1 = \lambda_2$

$4 = 1(X+1)^2 + \lambda_1(X+1)^2(X-1) + 1(X-1)^2 - \lambda_2(X-1)^2(X+1)$

$= X^2+2X+1 + \lambda_1(X^3+X^2-1) + X^2-2X+1 - \lambda_1X^3 +$

coeffs de X^3, de X^3 de X de 1 $\rightsquigarrow$ syst. lin. à résoudre.

EX: $\left(\dfrac{X^2}{(X-1)(X^2-X+1)}\right) \overset{THM}{=} \dfrac{\lambda}{X-1} + \dfrac{aX+b}{(X^2-X+1)^2} + \dfrac{cX+d}{X^2-X+1}$) dénom   5 inconnues

$\lambda = 1$ après mult par $(X-1)$

$(-1)^2-4<0$ IRRDCT

$$X^2 = (X^2-X+1)^2 + (aX+b)(X-1) + (cX+d)(X-1)(X^2-X+1)$$

$$= X^4+X^2+1-2X^3+2X^2-2X+aX^2-aX+bX-b$$
$$+cX^4+(-2c+d)X^3+(2c-2d)X^2+(-c+2d)X-dX-d$$

$$X^2 = X^4[1+c]+X^3[-2-2c+d]+X^2[3+a+2c-2d]$$
$$+X[b-a-2-c+2d]+1-b-d$$

5 éqts   4 inconnues

coeff X^4: $0 = 1+c$

coeff X^3: $0 = -2-2c+d$ $c=-1$

coeff X^2: $1 = 3+a+2c-2d$ $d=0$

coeff X^1: $0 = b-a-2-c+2d$ $a=0$

coeff X^0: $0 = 1-b-d$ $b=1$

EXO: (DM, EXAM L'AN DERNIER)

$$B(X) := \left(\left(\frac{(X^2-1)^2}{X(X^2+1)^3} = \frac{a}{X} + \frac{bX+c}{(X^2+1)^3} + \frac{b'X+c'}{(X^2+1)^2} + \frac{b''X+c''}{X^2+1}\right) X\right)(X^2+1)^3$$

$$B(-X) = -B(X) \overset{\text{Identif}}{\Longrightarrow} c = c' = c'' = 0$$

Mq $a=1$ (mult par X, puis poser $X=0$)

Mq $b=-4$: $(X^2+1)^3$ mult

Mq $b''=-1$ Mult par X

$$\frac{(X^2-1)^2}{(X^2+1)^3} = 1 + \frac{-4X^2}{(X^2+1)^3} + \frac{b'X^2}{(X^2+1)^2} + \frac{b''X^2}{X^2+1} \qquad X \longrightarrow \infty$$

$0 = 1 \qquad + b''$