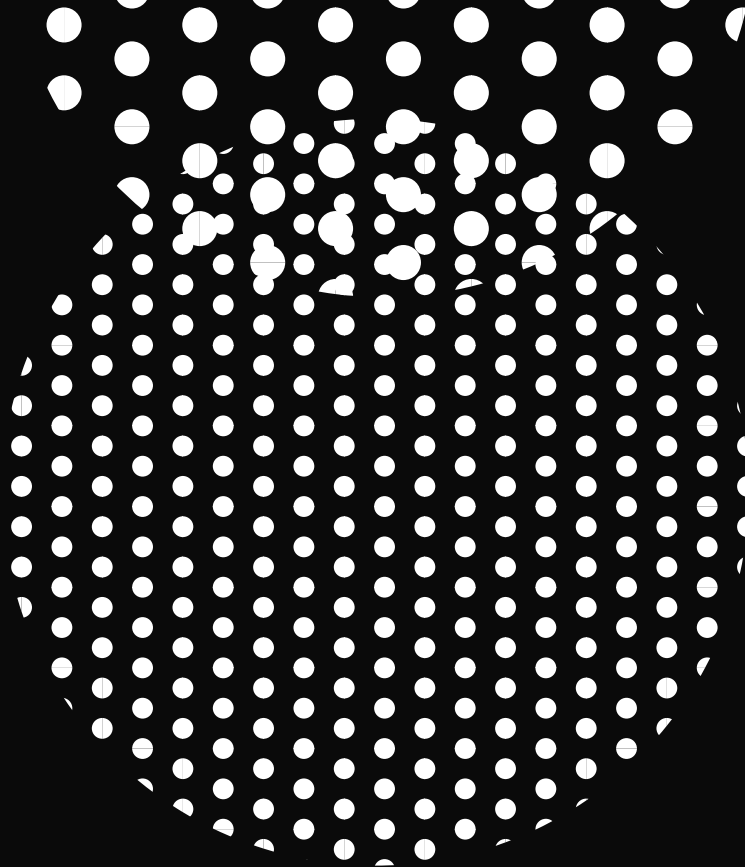




Def: K un corps est dit de caractéristique 0
si $\forall n \in \mathbb{Z} \ n \cdot 1_K \neq 0$

LEX: $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \quad p \in \mathbb{P}$

Def: Soit $p \in K[X]$ $\exists n \alpha \in K$ est racine de p si $p(\alpha) = 0$

$$p = \sum_{i=0}^n a_i x^i + \dots + a_0$$

$p: K \rightarrow K$ fonction associée à $p \in K[X]$
 $\beta \rightarrow p(\beta)$

Def: ^{algbr} $p'(x) := \frac{d}{dx} p(x) = n a_n x^{n-1} + \dots + a_1 + 0$ poly dérivée

$$\deg p' = \deg p - 1 \quad \text{si } \deg p \geq 1$$

$$\deg p' = -\infty \quad \text{si } p = a_0 \text{ const}$$

Prop:

$$(p+q)' = p' + q'$$

$$(\lambda p)' = \lambda p'$$

$$(pq)' = p'q + pq'$$

EXOLECT

$$(x^k)' = kx^{k-1} \quad \forall k \geq 1$$

$$p'' = (p')'$$

$$p''' = (p'')' = ((p')')'$$

$$p^{(l)} := (p^{(l-1)})' \quad \forall l \geq 1$$

$$p^{(0)} = p$$

$$(x^k)^{(l)} = \begin{cases} \overset{\neq 0 \text{ car } (K) \text{ nulle}}{k(k-1)\dots(k-l+1)} x^{k-l} & \text{si } l \leq k \\ 0 & \text{si } l \geq k+1 \end{cases}$$

$$(x^k)^{(l)} = \frac{k!}{(k-l)!} x^{k-l} \quad \text{si } l \leq k$$

Formule de MacLaurin:

$$\forall p \in \mathbb{K}[X], \quad n = \deg p$$

$$p(x) = p(0) + \frac{p'(0)}{1!}x + \frac{p''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{p^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

$$\begin{aligned} & \text{X} + x_0 \\ & p(x+x_0) = p(x_0) + \frac{p'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{p''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{p^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \\ & \Downarrow \\ & p(z) = p(a) + \frac{p'(a)}{1!}(z-a) + \frac{p''(a)}{2!}(z-a)^2 + \dots + \frac{p^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n \end{aligned}$$

Thm: Si a est racine de $p(x) \in \mathbb{K}[X]$ $\deg p = n \geq 1$ alors $\exists q(x) \in \mathbb{K}[X]$
 $p(x) = (x-a)q(x)$ $\deg q = \deg p - 1$

pv: Div $p(x)$ par $(x-a)$

$$p(x) = (x-a)q(x) + r(x) \quad \begin{array}{l} \deg r < 1 = \deg x \\ r \in \mathbb{K} \text{ const} \end{array}$$

poser $x=a$: $0 = p(a) = 0 + r$
donc $0 = r$.

CCL: $p(x) = (x-a)q(x)$

Thm: Tout polynôme p de $\deg = 1$ est irréductible

pv: $p = st$ $1 = \deg s + \deg t \Rightarrow \deg s = 0$
ou $\deg t = 0$

p réductible si $\exists s, t \in \mathbb{K}[X]$ const tq $p = st$ et $\deg s \geq 1 \leq \deg t$ $\square$

Thm: Un polynôme p de $\deg p = 2$ $p(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

est irréductible $\Leftrightarrow \nexists \alpha \in \mathbb{K}$ tq $p(\alpha) = 0$

pr: Par contraposition

p réductible $\Leftrightarrow \exists \alpha \in K \quad p(\alpha) = 0$

$P \Leftrightarrow Q$

$\Uparrow$

$\text{non } P \Leftrightarrow \text{non } Q$

$\Rightarrow p = zs$ avec $\deg z \geq 1$

$\deg s \geq 1$

$$2 = \deg p = \deg z + \deg s$$

donc $\deg z = 1 = \deg s$

$$p = (cx+d)(ex+f) \quad c, d, e, f \in K$$

racine $-\frac{d}{c}$ racine $-\frac{f}{e}$

Ex: Si $\exists \alpha \in K$ tq $p(\alpha) = 0$

Thm vu donne $p(x) = (x-\alpha)q(x)$ donc p réductible

Exo: Thm vrai pour $\deg p = 3$ $3 = \deg z + \deg s \Rightarrow \begin{cases} \deg z = 1 \\ \text{ou} \\ \deg s = 1 \end{cases}$

Lm: Tout polynôme $a_n x^n + a_0$ de $\deg = 1$ a
un unique racine $\alpha = -\frac{a_0}{a_1} \in K$

Suite a racine de $p \Rightarrow p(x) = (x-\alpha)p_1(x)$

possible a racine de $p_1 \Rightarrow p(x) = (x-\alpha)^2 p_2(x)$

...

$h \geq 1$ entez $\deg(p(x) = (x-\alpha)^h p_h(x))$ fin $p_h(\alpha) \neq 0$

$$\deg p = h + \deg p_h$$

Déf: la multiplicité d'un ^{racine} zéro α de $p(x)$ c'est le ^{nombre} $h \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ max h
tq $p(x) = (x-\alpha)^h p_h(x)$ $p_h(\alpha) \neq 0$

Lm: $a \neq b \in K \Rightarrow x-\alpha \nmid x-\beta = 1$ $\square$

$$4x(x^3 - 6x^2 - 4x - 8)$$

$$(x-2)^3 \cdot x = (x-2)^2 = (x^2 - 4x + 4)(x-2) = 4x^3 - 27x^2 - 16x^2 - 32x$$

Thm: Si $a_1, a_2, \dots, a_r \in K$ sont racines distinctes de $p(x) \in K[X]$ de multiplicités $h_1 \geq 1, \dots, h_r \geq 1$

Alors $\exists q(x) \in K[X] \neq 0$

$$\deg \left(p(x) = (x-a_1)^{h_1} (x-a_2)^{h_2} \dots (x-a_r)^{h_r} q(x) \right)$$

$$\deg p = h_1 + h_2 + \dots + h_r + \deg q$$

$$\deg p - h_1 - h_2 - \dots - h_r = \deg q$$

Thm: Tout polynôme $p(x) \in K[X]$ a au plus $\deg p$ racines. Moins est possible.

Ex: $x^2 + 1 \in K[X]$ pas de racines dans $\mathbb{R}$

Ex: $x^2 - 2$ dans $\mathbb{Q}[X]$

pas de racines dans $\mathbb{Q}$

pv: par l'absurde $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ $p \wedge q = 1$

$$\text{avec } \frac{p^2}{q^2} = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2 \quad \left(\begin{array}{l} \text{GAUSS} \\ \Rightarrow p \text{ doit diviser } q \\ \text{contradiction } \square \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow p^2 = 2q^2 \quad \text{donc } p^2 \equiv 0 \pmod{2}$$

$$\text{Eucl } p \equiv 0 \pmod{2} \Rightarrow p = 2p'$$

$$4p'^2 = 2q^2$$

$$\Leftrightarrow 2p'^2 = q^2 \Rightarrow q^2 \equiv 0 \pmod{2} \Rightarrow q \equiv 0 \pmod{2} \\ q = 2q'$$

$$\Rightarrow 2|p \quad \text{et} \quad 2|q \Rightarrow \text{contradiction } \square$$

Déf: K est algéb. dos st tout $p(x) \in K[X]$ $\deg p \geq 1$ admet au moins une racine dans K .

$$\forall p \quad \exists d \in K \quad p(d) = 0$$

Thm: D'Alembert - Gauss

$\mathbb{C}$ est algébriquement clos **ADMIS**

Thm - Coz: $\forall p(x) = a_n^* x^n + \dots + a_0 \in \mathbb{C}[X] \quad n \geq 1, a_i \in \mathbb{C}$

$\exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C} \text{ tq}$

$$p(x) = a_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n) = a_n x^n + \dots$$

Thm veut aussi
sur K algébriquement
clos

p.v: Comme $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, $\exists$ racine $\alpha_1 \in \mathbb{C}$

$$0 = p(\alpha_1)$$

THM VU

$$p(x) = (x - \alpha_1) q(x)$$

$$n-1 = \deg q$$

Si $n-1 \geq 1$

$\exists$ racine

$$\alpha_2 \in \mathbb{C} \text{ de } q(x)$$

$$q(x) = (x - \alpha_2) r(x)$$

$$p(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) r(x) \text{ etc.}$$

À la fin, c'est une constante $\deg = 0$

$$p(x) = (x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_n) \lambda \quad \text{avec } \lambda = a_n$$

□

Développer qd on a toutes les racines
simple $a_n = 1$ $p \in \mathbb{K}[X]$

$$p(x) = (x - \alpha_1) = x - \alpha_1$$

$$p(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) = x^2 - (\alpha_1 + \alpha_2)x + \alpha_1\alpha_2$$

$$p(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) = x^3 - x^2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) - x(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3) + \alpha_1\alpha_2\alpha_3$$

$$(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)(x - \alpha_4) = x^4 - x^3(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) +$$

$$x^2(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4 + \alpha_3\alpha_4) -$$

$$x(\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \alpha_1\alpha_3\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3\alpha_4) + \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$$

$$+ \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 \quad \binom{4}{4} = 1$$

sous les
produits 2 à 2
 $\binom{4}{2} = 6$
 $\binom{4}{3} = 4$
 $\binom{4}{4} = 1$

$$\underline{G^{val}}: (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n) = x^n - x^{n-1} \left(\sum_{1 \leq i_1 \leq n} \alpha_{i_1} \right) + x^{n-2} \left(\sum_{1 \leq i_1, i_2 \leq n} \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \right) - x^{n-3} \left(\sum_{1 \leq i_1, i_2, i_3 \leq n} \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \alpha_{i_3} \right) + \dots$$

$$\underline{Def}: \sigma_k := \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \dots \alpha_{i_k}$$

$k^{\text{ème}}$ fonction symétrique élémentaire des α_i :

$$\underline{CLL}: a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n) = a_n \left(\sum_{k=0}^n x^{n-k} (-1)^k \sigma_k(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \right)$$

Résumé: Pour $K = \mathbb{C}$ tout polynôme est scindé

$$p(x) = a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n) \quad \text{YABON}$$

Q: sur $\mathbb{R}[X]$? : X^2+1 pas scindable

Q: factoriser le plus possible

$$\alpha \in \mathbb{C} \quad \alpha = \operatorname{Re} \alpha + i \operatorname{Im} \alpha \quad (i = \sqrt{-1})$$

$$\text{conjugué} \quad \bar{\alpha} = \operatorname{Re} \alpha - i \operatorname{Im} \alpha$$

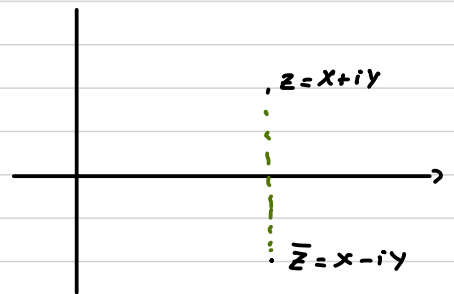
$$\overline{\alpha + \beta} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}$$

$$\overline{\alpha\beta} = \bar{\alpha} \bar{\beta}$$

$$\alpha = \bar{\alpha} \Leftrightarrow \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\text{Soit } p \in \mathbb{R}[X] \quad p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i \quad a_i \in \mathbb{R}$$

$$\subset \mathbb{C}[X]$$



$a_i \in \mathbb{R}$ Eureka! $p(x) \in \mathbb{C}[X]$

$p(x)$ a donc n racines complexes $p(x) = \lambda(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n)$ ^{Suspense!}

Im: Si $\alpha \in \mathbb{C}$ est racine de $p(x) \in \mathbb{R}[X]$ alors $\bar{\alpha}$ aussi racine
EX: $x^2+1 = (x-\sqrt{-1})(x+\sqrt{-1}) \quad \sqrt{-1} = -\sqrt{-1} \quad 0 = p(\bar{\alpha})$

pv: $0 = \overbrace{a_n \alpha^n + \dots + a_1 \alpha + a_0}^{\text{conjugue}}$

$$\Rightarrow 0 = a_n \bar{\alpha}^n + \dots + a_1 \bar{\alpha} + a_0$$

$$0 = p(\bar{\alpha})$$

□

Thm - oubliée: $\alpha \in \mathbb{K}$ racine de $p(x)$ de multiplicité $h \geq 1$

$$p(x) = (x - \alpha)^h q(x) \quad q(\alpha) \neq 0$$



$$0 = p(\alpha) = p'(\alpha) = p''(\alpha) = \dots = p^{(h-1)}(\alpha) \text{ et } 0 \neq p^{(h)}(\alpha)$$

pv: $\Rightarrow (p(x) = (x - \alpha)^h q(x))'$

$$p'(x) = h(x - \alpha)^{h-1} q(x) + (x - \alpha)^h q'(x) = (x - \alpha)^{h-1} [h q(x) + (x - \alpha) q'(x)]$$

$$= (x - \alpha)^{h-1} [h q(x) + \dots]$$

$$p''(x) = (x - \alpha)^{h-2} [h(h-1) q(x) + (x - \alpha) (\dots)]$$

$$p'''(x) = (x - \alpha)^{h-3} [h(h-1)(h-2) q(x) + (x - \alpha) (\dots)]$$

$\vdots$

$$p^{(h-1)}(x) = (x - \alpha) \left(\frac{h!}{2!} + (x - \alpha) (\dots) \right)$$

$$p^{(h)}(x) = 1 [h! + (x - \alpha) (\dots)]$$

donc $0 = p(\alpha) = p'(\alpha) = \dots = p^{(h-1)}(\alpha)$

$$0 \neq p^{(h)}(\alpha)$$

$\Leftrightarrow$ Réciproquement avec Taylor

$$p(x) = \underbrace{p(\alpha)}_{\circ} + \underbrace{(x - \alpha) \frac{p'(\alpha)}{1!}}_{\circ} + \dots + \underbrace{\frac{(x - \alpha)^{h-1}}{(h-1)!} p^{(h-1)}(\alpha)}_{\circ} + \frac{(x - \alpha)^h}{h!} p^{(h)}(\alpha) + (x - \alpha)^{h+1} (\dots)$$

$$= (x - \alpha)^h \left[\underbrace{\frac{p^{(h)}(\alpha)}{h!}}_{\neq 0} + (x - \alpha) (\dots) \right]$$

$$=: (x - \alpha)^h q(x) \quad \text{avec } q(\alpha) \neq 0 \quad \square$$

Si α racine de $p(x) \in \mathbb{R}[X]$ de multiplicité $h \geq 1$
^{THM}
^($\Rightarrow$)
^{CRITÈRE} $p(\alpha) = p'(\alpha) = \dots = p^{(h-1)}(\alpha) = 0 \neq p^{(h)}(\alpha)$ ^{CJg CPLXE}

^{LM}
^($\Leftarrow$)
^{CRITÈRE} $p(\bar{\alpha}) = p'(\bar{\alpha}) = \dots = p^{(h-1)}(\bar{\alpha}) = 0 \neq p^{(h)}(\bar{\alpha})$

$\Rightarrow \alpha$ est une racine de mult. h de $p(x)$

Voiz $p(x) \in \mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$ se factorise

$$p(x) = \lambda (x - \gamma_1)^{m_1} (x - \gamma_2)^{m_2} \dots (x - \gamma_t)^{m_t} \quad \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_t \in \mathbb{C} \\ m_1, \dots, m_t \geq 1$$

CAS 1: $\gamma_i \in \mathbb{R}$ YABON Noter $\alpha_i \in \mathbb{R}$

CAS 2: $\gamma_i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ Alors $\bar{\gamma}_i$ racine de m_i mult
 $\gamma_i \neq \bar{\gamma}_j$
 $m_i = m_j$

$p(x) = \lambda (x - \alpha_1)^{g_1} \dots (x - \alpha_2)^{g_2}$ Ceci implique qu'on peut écrire les racines i
 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_2, \beta_1, \bar{\beta}_1, \dots, \beta_s, \bar{\beta}_s\}$
 réels distincts complexes non réels distincts

$z + \bar{z} = t$ (multiplicités respectives)

$g_1, \dots, g_2 \quad h_1, h_1, \dots, h_s, h_s \geq 1$

$$n = g_1 + \dots + g_n + 2h_1 + \dots + 2h_s$$

$$p(x) = \lambda (x - \alpha_1)^{g_1} \dots (x - \alpha_2)^{g_2} \\ (x - \beta_1)^{h_1} (x - \bar{\beta}_1)^{h_1} \dots (x - \beta_s)^{h_s} (x - \bar{\beta}_s)^{h_s}$$

$\in \mathbb{R} \quad \in \mathbb{R} \quad \in \mathbb{R} \quad \in \mathbb{R}$

Thm vu: $\forall p \in \mathbb{K}[X], \deg p \geq 1$, se factorise $p(x) = \lambda q_1(x)^{i_1} \dots q_t(x)^{i_t}$
 $q_1(x), \dots, q_t(x)$ irréductibles $\neq$ unitaires $i_1, \dots, i_t \geq 1$

Q: Dans $\mathbb{R}[X]$, qu'est-ce que cela donne?

sur $\mathbb{C}[X]$ tous les $q_i(x) = (x - \gamma_i)$ $\gamma_i \in \mathbb{C}$ $\deg = 1$ irréductible

$$p(x) = 1(x - \alpha_1)^{g_1} \dots (x - \alpha_s)^{g_s} [(x - \beta_1)(x - \bar{\beta}_1)]^{h_1} \dots [(x - \beta_s)(x - \bar{\beta}_s)]^{h_s}$$

$$(x - \beta_j)(x - \bar{\beta}_j) = x^2 - (\underbrace{\beta_j + \bar{\beta}_j}_{= 2 \operatorname{Re} \beta_j \in \mathbb{R}})x + \underbrace{\beta_j \bar{\beta}_j}_{= |\beta_j|^2 \in \mathbb{R}} \in \mathbb{R}[X]$$

($1 \leq j \leq s$)

Q: Est-il irréductible?

Im: $x^2 + bx + c$ irréductible sur $\mathbb{R}[X]$

$$b^2 - 4c < 0$$

pv: si $b^2 - 4c \geq 0$, deux racines réelles

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2} \in \mathbb{R} \quad \text{donc réductible}$$

Si $b^2 - 4c < 0$, supposons par l'absurde que $x^2 + bx + c = (x - \delta)(x - \varepsilon)$

$$b = -\delta - \varepsilon$$

$$c = \delta \varepsilon$$

$$\Rightarrow b^2 - 4c = (\delta + \varepsilon)^2 - 4\delta \varepsilon$$

$$= \delta^2 + 2\delta \varepsilon + \varepsilon^2 - 4\delta \varepsilon$$

$$= \delta^2 - 2\delta \varepsilon + \varepsilon^2 = (\delta - \varepsilon)^2 \geq 0$$

CONTRAD