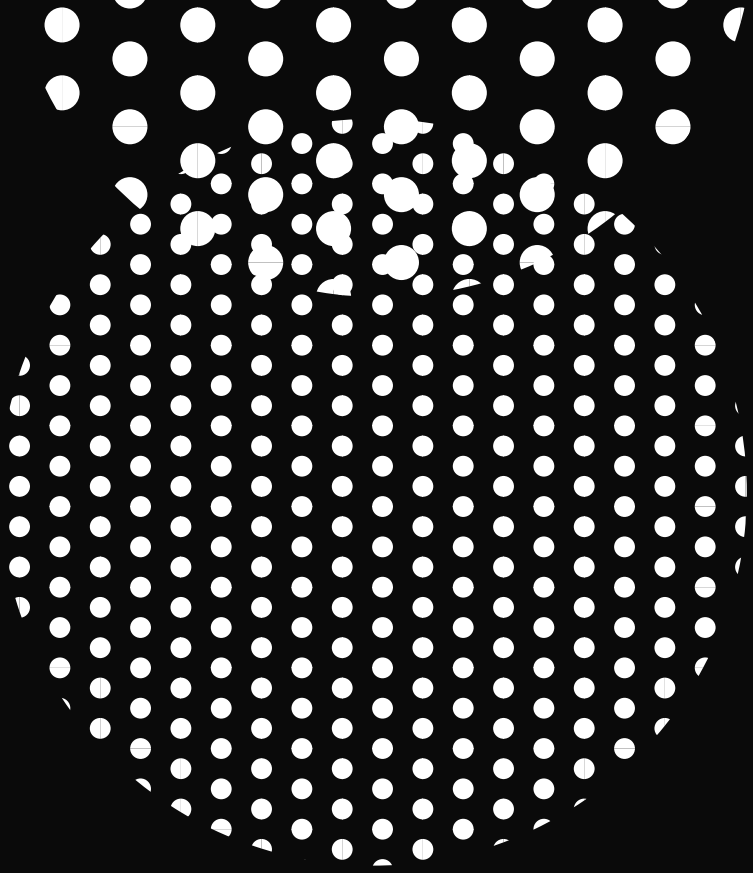

Exercice 5

Soit $\sigma \in S_n$

$\exists r > 0$ tq $\sigma = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_n$

où les τ_i sont des transpositions.

on a $\varepsilon(\sigma) = (-1)^r$

$n \geq 2$ Soit $\varphi : S_n \longrightarrow \mathbb{C}^*$ morphisme de gpes

Soit $\tau \in S_n$ transposition.

comme $\tau^2 = Id$

$\varphi(\tau^2) = \varphi(\tau)^2 = 1 \iff \varphi(\tau)^2 - 1 = 0$

$(\varphi(\tau) - 1)(\varphi(\tau) + 1) = 0$

Donc $\varphi(\tau) = \pm 1$

montrons que si $\exists \tau$ tq $\varphi(\tau) = 1 \Rightarrow \varphi(\tau') = 1 \quad \forall \tau'$

et sinon $\varphi(\tau') = -1 \quad \forall \tau'$

SPDG : sans perdre de généralité, on peut supposer que $\tau = (1\ 2)$

<u>si $n = 2$</u> $\Rightarrow$ OK ! (une seule transposition)

<u>si $n = 3$</u> $(1\ 2)(1\ 3)(2\ 3)$ et $(1\ 2) \circ (1\ 3) = (1\ 3)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\hookrightarrow$ 1 élément commun $\quad (1\ 2)\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$= (1\ 3\ 2)$

$\varphi((1\ 3\ 2)) = \varphi((1\ 2) \circ (1\ 3)) = \varphi((1\ 2))\varphi((1\ 3)) \in \mathbb{R}$

et $\varphi((1\ 3\ 2)^3) = \varphi((1\ 3\ 2))^3 = 1$ donc $\varphi((1\ 3\ 2)) \in \{1, j, j^2\}$

d'où $\varphi((1\ 3\ 2)) = 1$

donc $\varphi((1\ 2)) = \varphi((1\ 3))$

<u>si $n \geq 4$:</u> $(1\ 2) \rightarrow$ ok (cas $n = 2$)

$(1\ 3) \rightarrow$ ok ! (cas $n = 3$)

$(3\ 4) \rightarrow$ pas de point commun

$\varphi((1\ 2)) = \varphi((2\ 3)) = \varphi((3\ 4))$

On a démontré : $\forall\ \tau, \tau' \in S_n$, $\varphi(\tau) = \varphi(\tau') \in \{1, -1\}$

Soit $\sigma \in S_n$. On a : $\exists\ r > 0$ et $\tau_1, \dots, \tau_r$ tq $\sigma = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_r$

donc $\varphi(\sigma) = \varphi(\tau_1) \cdot \ldots \cdot \varphi(\tau_r) = \varphi(\tau)^r$

$$= \begin{cases} 1 & \text{si } \varphi(\tau) = 1 \\ (-1)^n & \text{si } \varphi(\tau) = -1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{donc } \varphi = 1 \text{ ou} \\ \varepsilon(\sigma) & \varphi = \varepsilon \end{cases}$$

<u>Exercice 7</u> Soit $n \geq 3$

$A_n = \{\sigma \in S_n : \varepsilon(\sigma) = 1\} = \{\sigma \in S_n \,/\, \exists\, r > 0,\ \tau_1, \dots, \tau_{2r}$ tq $\sigma = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_{2r}\}$

$\{\sigma = (\tau_1 \circ \tau_2) \circ \dots \circ (\tau_{2r-1} \circ \tau_{2r})\}$

$= \langle \tau \circ \tau' \text{ avec } \tau, \tau' \in S_n \rangle$

- si $\tau = \tau' = (1\ 2)$,
  $\tau \circ \tau' = Id = (1\ 2\ 3)^3$

- si SPDG, $\tau = (1\ 2)$
  $\tau' = (1\ 3)$

  $\tau \circ \tau' = (1\ 3\ 2)$ ok !

- Sinon $\tau = (1\ 2)$
  $\tau' = (3\ 4)$

  $(1\ 3\ 2) \circ (1\ 3\ 4) = (1\ 2) \circ (3\ 4)$

  ok !

Donc $\langle 3 \text{ cycles} \rangle = A_n$

Двадцять перше листопада
Класна робота

<u>Exercice 8</u>

Soit H sg de S_n

H est distinguer $\Leftrightarrow$ $\forall \sigma \in S_n, \forall h \in H, \sigma h \sigma^{-1} \in H$

On suppose que $\exists\ \tau \in H$

On suppose que $\exists\ 2 \in H$ $\quad (1\ 2) \in H$

$$(2\ 3\ 4)(1\ 2)(4\ 3\ 2) = \begin{pmatrix} 1 \to 1 & \to 2 & \to 3 \\ 2 \to 4 & \to 4 & \to 2 \\ 3 \to 2 & \to 1 & \to 1 \\ 4 \to 3 & \to 3 & \to 4 \end{pmatrix}$$

$$= (1\ 3)$$

Soit $\sigma \in S_n$ $\quad \sigma(1\ 2)\sigma^{-1}$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & \to 3 & \to 3 & 1 \\ 2 & \to 1 & \to 2 & \to 3 \\ 3 & \to 2 & \to 1 & \to 2 \end{pmatrix}$

$(1\ 2\ 3)(1\ 2)(3\ 2\ 1)$

$$= (2\ 3)$$

soit $\tau \in S_n$

- si $\tau = (1\ 2)$, $\sigma = \begin{cases} id & \text{confient} \\ (1\ 2) \end{cases}$

- si $n \geq 3$, $\tau = (1\ 3)$ $\quad \sigma\ (2\ 3)$ ok!

- si $n \geq 4$ $\tau = (3\ 4)$ $\quad \sigma\ (1\ 3\ 2\ 4)$ ok!

Donc $\forall \tau \in S_n$ $\quad \tau \in H$

donc $\langle \tau \rangle \subset H$ $\quad$ d'où $H = S_n$

$\langle \tau \rangle \subset S_n$

Exercice 9

a) G tq $|G| = 2n$, $n \in \mathbb{N}^*$

H ss gpe de G tq $|H| = \frac{|G|}{2} = n$

H distingué dans g

On a $|G/H| = \frac{2n}{n} = 2$ donc $G/H = \{\bar{e}, \bar{f}\}$
avec $\bar{f}^2 \neq \bar{e}$ et $f^2 = e$

Soit $g \in G$. On a $\bar{g} = \begin{cases} \bar{e} & \text{donc } \bar{g}^2 = \bar{e}^2 = \bar{e} \\ \bar{f} & \text{donc } \bar{g}^2 = \bar{f}^2 = \bar{e} \end{cases}$

d'où $\bar{g}^2 = \bar{e}$ donc $g^2 \in H$

b) $|A_4| = 12$ voir exo 6

par Lagrange $|H| \mid |G| \Rightarrow |H| \mid 12$

Donc $|H| \in \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

c) $A_4 = \{Id, (12)(34), (13)(24), (14)(23), \text{3 cycles}\}$

On raisonne par l'absurde
Soit $|H| = 6$
On a bien : $|A_4| \in 2\mathbb{N}$ $|H| = \frac{|A_4|}{2}$

donc on peut utiliser (a)

D'où $\forall g \in A_4$, $g^2 \in H$

1. $Id^2 = Id$
2. $((12)(34))^2 = Id$
3. $(123)^2 = (132)$

donc H contient tous les 3 cycles d'où $|H| \geq 9$
absurde

d) $\{Id\}$ Card $= \underline{1}$

$\{Id, (1\ 2)(3\ 4)\}$ Card $= \underline{2}$

$\vdots$

$\{Id, (1\ 3\ 2), (1\ 2\ 3)\}$ Card $= 3$

$\left\{Id, \begin{matrix}(1\ 2)(3\ 4), \\ (1\ 3)(2\ 4), \\ (1\ 4)(2\ 3)\end{matrix}\right\}$ Card $= 4$

Et si 2 3-cycles $|H| \geq 5 \Rightarrow$ impossible

sauf si $H = A_4$