
G
O
D
O
O
O
O
D

Exercice 1

a) Soient a, b, c, d dans $\{1, \dots, n\}$

$(a,b) \circ (c,d) \circ (d,a)$

$$(c,d) \circ (d,a) = \begin{pmatrix} a \to d \to c \\ c \to c \to d \\ d \to a \to a \end{pmatrix} = (a \ c \ d)$$

$$(a,b) \circ (c,d) \circ (d,a) = (a \ b) \circ (a \ c \ d)$$

$$= \begin{pmatrix} a \to c \to c \\ b \to b \to a \\ c \to d \to d \\ d \to a \to b \end{pmatrix} = (a \ c \ d \ b)$$

$= (a \ c \ d \ b)$

b)
$$\begin{pmatrix} 1 \to 4 \to 3 \\ 2 \to 2 \to 1 \\ 3 \to 5 \to 5 \\ 4 \to 3 \to 4 \\ 5 \to 1 \to 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix} = (1 \ 3 \ 5 \ 2)$$

c)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Exercice 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 4 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1 \ 3 \ 4 \ 6) \circ (2 \ 5)$$

$o((1 \ 2 \ 3 \ 4) \circ (2 \ 5 \ 1)) = ppcm(4, 2) = 4$

$\sigma^{100} = Id$

Exercice 3

Soit $n \geq 2$ et $2 \leq k \leq n$

nombre de k-cycles dans S_n

$|S_n| = n!$

$o(k) = k$

$\binom{n}{k}$ façon de choisir k éléments parmi n
On les arrange en cycles

Les cycles de la forme: (1 2 3) (2 3 1) (3 1 2)
sont équivalent, donc on les compte pas.

Il y a k! façon d'arranger k élément
en cycles dont k sont équivalents, donc $(k-1)!$

Finalement: $\binom{n}{k}(k-1)! = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}(k-1)! = \frac{n!}{k(n-k)!}$

Exercice 4

Chaque $\sigma \in S_8$ on peut écrire comme une
composition à cycles à supports disjoints.

$\sigma = \sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_n$ $\quad n \leq 8$

$o(\sigma) = ppcm(o(\sigma_1), \dots, o(\sigma_n))$ Cherchons le plus grand ppcm

$o(1 \text{ cycle}) = 8$
$o(4,3,1) = 12$
$o(7,1) = 7$
$o(6,2) = 6$
$\underline{o(5,3) = 15}$

Exercice 6

$A_4 \qquad S_4$

$2 = [S_4 : A_4] \Rightarrow |A_4| = \frac{|S_4|}{2} = \frac{4!}{2} = \frac{24}{2} = 12$

Donc A_4 contient 12 éléments.

Décrivons les éléments possibles:

$(1\ 2)$
$(1\ 3)$
$(1\ 4)$
$(2\ 3)$
$(2\ 4)$
$(3\ 4)$

$$\left(\begin{array}{l} Id \\ (1\ 2)(1\ 3) = (1\ 3\ 2) \\ (1\ 2)(1\ 4) = (1\ 4\ 2) \\ (1\ 3)(1\ 4) = (1\ 4\ 3) \\ (1\ 2)(2\ 3) = (1\ 2\ 3) \\ (1\ 2)(2\ 4) = (1\ 2\ 4) \\ (1\ 3)(3\ 4) = (1\ 3\ 4) \\ (2\ 3)(3\ 4) = (2\ 3\ 4) \\ (2\ 3)(2\ 4) = (2\ 4\ 3) \\ \\ (1\ 2)(3\ 4) \\ (1\ 3)(2\ 4) \\ (1\ 4)(2\ 3) \end{array} \right)$$

Exercice 7

$A_n = \{ \sigma \in S_n : \quad \varepsilon(\sigma) = 1 \}$

Soient $a, b, c, d \in [\![1, n]\!]$

Soit $\sigma = (a, b)$ alors $\sigma^2 = (Id) = (a\ b\ c)^3$ Donc OK

Soit $\sigma = (a\ b)$
$\sigma' = (b\ c)$ $\quad \sigma \circ \sigma' = (a\ b\ c)$ donc OK

Soit $(a\ b) \circ (c\ d) = (a\ c\ b) \circ (a\ c\ d)$ donc OK

Donc $\langle 3 \text{ cycles} \rangle = A_n$

Exercice 8

Soit $\mathcal{H}$ un sous-groupe distingué de S_n
et $\exists\ \sigma = (a\ b) \in \mathcal{H}$

De plus $\forall (a\ b) \in \mathcal{H}\ \forall\ \sigma \in S_n \quad \sigma^{-1}(a\ b)\sigma \in \mathcal{H}$

Alors soit
$$\sigma = \underbrace{(b\ d\ c)}_{\in S_n}\underbrace{(a\ b)}_{\in \mathcal{H}}\underbrace{(c\ d\ b)}_{\in S_n} = (a\ d) \in \mathcal{H} \text{ aussi}$$

Donc $\forall a \neq b \in [\![1, n]\!] \quad (a\ b) \in \mathcal{H}$

$\langle (a\ b) \rangle \subset \mathcal{H}$ mais les transpositions engendrent S_n, donc $\langle (a\ b) \rangle = S_n \subset \mathcal{H}$
et $\mathcal{H} \subset S_n$

$\Rightarrow \underline{\mathcal{H} = S_n}$

Exercice 9.

a) Soit $\mathcal{H}$ un sous-groupe de G tq $|\mathcal{H}| = \frac{|G|}{2}$
donc $\mathcal{H} \triangleleft G$.

Alors soit $q \in G \setminus \mathcal{H}$ $\quad G = \mathcal{H} \cup q\mathcal{H}$

Soit $g \in G$ il y a deux possibilités:

$g \in \mathcal{H}$	$g \notin \mathcal{H}$ ie $g \in q\mathcal{H} = \mathcal{H}q$
Ce cas est trivial car $\mathcal{H}$ est un sous-gpe. Donc $g \in \mathcal{H} \Rightarrow g^2 \in \mathcal{H}$	$\exists\ h \in \mathcal{H}$, $h' \in \mathcal{H}$ tq $g = qh$, $g = h'q$ $g^2 = q\underbrace{h\,h'}_{\in \mathcal{H}}q$ $= q\,h''q$

Soit $g \in G$

Dans G/H

si $g \in H \Rightarrow \bar{g} = \bar{I}_{G/H}$

si $g \notin H \Rightarrow g \in gH = Hg \Rightarrow \bar{I} \neq \bar{g} \in G/H$

$\bar{g}^2 = \bar{g}\bar{g} = \bar{I}$ car dans G/H il y a seulement deux éléments, donc g est son propre inverse.

$\bar{g}^2 = \bar{I} \Rightarrow \underline{g^2 \in H}$

b) $|A_4| = 12$

Par le thm de Lagrange, si H est un sous-groupe de $|A_4|$ donc $|H| \mid |A_4|$

Alors les cardinaux possibles sont:
$1, 2, 3, 4, 6, 12$

c)
$$\left(\begin{array}{l} Id \\ (1\ 2)(1\ 3) = (1\ 3\ 2) \\ (1\ 2)(1\ 4) = (1\ 4\ 2) \\ (1\ 3)(1\ 4) = (1\ 4\ 3) \\ (1\ 2)(2\ 3) = (1\ 2\ 3) \\ (1\ 2)(2\ 4) = (1\ 2\ 4) \\ (1\ 3)(3\ 4) = (1\ 3\ 4) \\ (2\ 3)(3\ 4) = (2\ 3\ 4) \\ (2\ 3)(2\ 4) = (2\ 4\ 3) \\ (1\ 2)(3\ 4) \\ (1\ 3)(2\ 4) \\ (1\ 4)(2\ 3) \end{array} \right) = A_4$$

c) $|A_4| = 12 \in 2\mathbb{N}$ et $|H| = 6 = \frac{|A_4|}{2}$

Donc H distingué dans A_4

Alors $\forall \sigma \in A_4$

$\sigma^2 \in H$

$Id^2 = Id \in H$

$((a\ b)(c\ d))^2 = Id \in H$

$(a\ b\ c)^2 = (a\ c\ b) \in H$ donc

$|H| \geq 9 \Rightarrow$ absurde car $|H| = 6$.

Donc A_4 ne peut pas avoir un sous groupe de cardinale 6.

d)

$|H| = 1 \Rightarrow \quad H = \{Id\}$

$|H| = 2 \Rightarrow \quad H = \{Id,\ (1\ 2)(3\ 4)\}$

ou $H = \{Id,\ (1\ 3)(2\ 4)\}$

ou $H = \{Id,\ (1\ 4)(2\ 3)\}$

$|H| = 3 \Rightarrow$

$(1\ 2)(3\ 4) \circ (1\ 3)(2\ 4)$

$(1\ 2)(1\ 4\ 3)(2\ 4)$

$(1\ 4\ 3\ 2)(2\ 4)$

$= (1\ 4) \circ (2\ 3)$