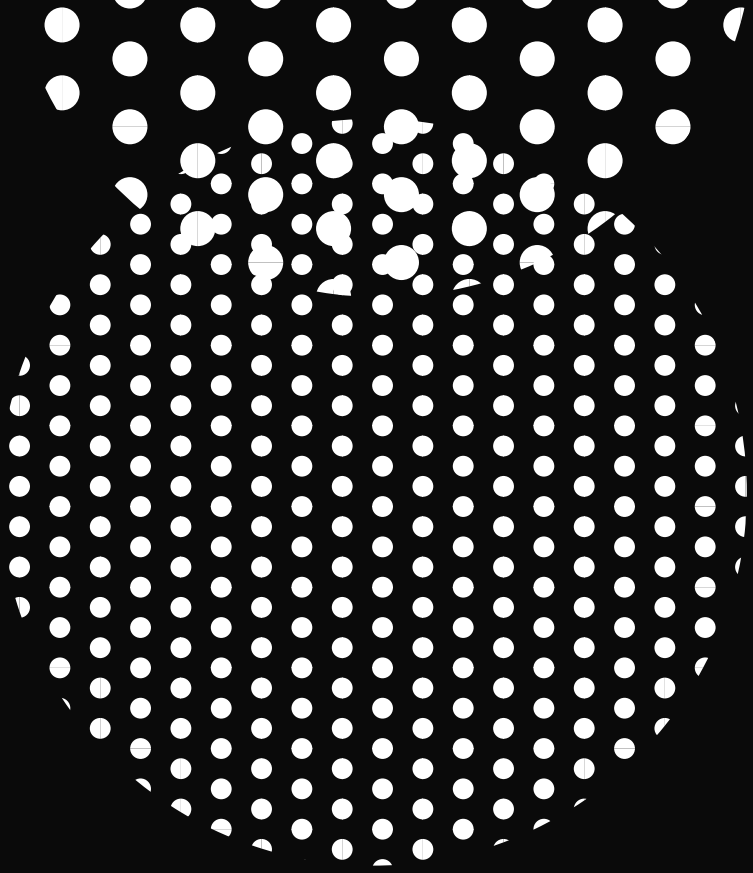

$\mathrm{Fix}\ \sigma = \{a \in E : \sigma(a) = a\}$ "les vals a. tq $\sigma(a) = a$"
(reste les mêmes)

$\mathrm{Supp}\ \sigma = \{a \in E : \sigma(a) \neq a\}$ "les points qui se changent"
$= (\mathrm{Fix}\ \sigma)^c$

$\mathrm{Orb}_\sigma\ a = \{b \in E : b \sim a\}$
$\hookrightarrow \exists i \in \mathbb{N}\ \sigma^i(a) =$

<u>Déf</u> E = ensemble $|E| < \infty$

$S(E) = \{\sigma : E \to E \text{ bijections}\}$ gpe de permutations

Loi $\circ$ $\sigma \circ \sigma'$ composition assive $Id : E \to E$

$E \xrightarrow[\sigma]{\sim} E$
$E \xleftarrow[\sigma^{-1}]{\sim} E$ bijection réciproque $\sigma \circ \sigma^{-1} = Id = \sigma \circ \sigma^{-1}$

$S(E)$ pas commutative dès que $|E| \geq 3$

<u>Ex:</u> $E = \{1, 2, 3\}$

$$\begin{array}{cccc} \tau & 1 & 2 & 3 \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & 1 & 3 & 2 \\ \sigma & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & 2 & 3 & 1 \end{array} \qquad \sigma \circ \tau \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 3 & 1 \end{array}$$

$\neq$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 1 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 1 & 2 \end{array} \qquad \tau \circ \sigma \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 1 & 2 \end{array}$$

<u>CCL:</u> $\underset{*}{\sigma \circ \tau} \neq \underset{*}{\tau \circ \sigma}$

Ex: $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & \overset{\text{fixé}}{2} & 3 & 4 & 5 & \overset{\text{fixé}}{6} & 7 & 8 & 9 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 4 & 2 & 7 & 5 & 8 & 6 & 9 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$ permutation de $\{1, \dots, 9\}$

$Fix(\sigma) = \{2, 6\}$

$Supp(\sigma) = \{1, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}$ "l'ens des entiers qui changent place"

Déf: $Fix(\sigma) := \{a \in E : \sigma(a) = a\}$

$Supp(\sigma) := \{a \in E : \sigma(a) \neq a\}$

$E = Fix(\sigma) \cup Supp(\sigma)$ réunion disjointe

Fait Prop.?? On peut supposer $E = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ où $n = Card\ E$

Thm: $Card\ S(E) = n! = |E|!$

pv: Soit $\tau \in S(E)$ $E \xrightarrow{\tau} E$ biject

$\tau(1) \in \{1, \dots, n\}$ n choix possibles

$\tau(2) \in \{1, \dots, n\} \setminus \{\tau(1)\}$ $n-1$ choix possibles

Etc.

$n(n-1)(n-2)\dots 1 = n!$ $\square$

Ex: $n = 2$ $2! = 2$

$$S(E) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \downarrow & \downarrow \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \downarrow & \downarrow \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ex: $n = 3$ $3! = 6$

$$S(E) = \left\{ \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}^{Id}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \left(1 \to 2 \to 3\right) = (1 \quad 2 \quad 3)$$ permutation circulaire
cycle

Prp: Soit E un ensemble fini

(1) Pour $\sigma \in S(E)$ on a:

$\sigma(\text{Fix } \sigma) = \text{Fix } \sigma$

$\sigma(\text{Supp } \sigma) = \text{Supp } \sigma$ → rpl "=" par "$\neq$"

pv (1): Pour $a \in E$ on a

$$\begin{aligned}
\sigma^{-1}(\sigma(\text{Fix } \sigma) \ni a) &\iff \text{Fix } \sigma \ni \sigma^{-1}(a) \\
&\iff \sigma(\sigma^{-1}(a)) = \sigma^{-1}(a) \\
&\iff \sigma(a = \sigma^{-1}(a)) \\
&\iff \sigma(a) = \sigma(\sigma^{-1}(a)) \\
&\iff \sigma(a) = a \\
&\iff \text{Fix } \sigma \ni a
\end{aligned}$$

(2) $\forall \sigma \in S(E)$ on a:

$\text{Fix } \sigma = \text{Fix } \sigma^{-1}$

$\text{Supp } \sigma = \text{Supp } \sigma^{-1}$

pv (2): $a \in \text{Fix } \sigma \iff \sigma^{-1}(\sigma(a) = a) \iff a = \sigma^{-1}(a) \iff a \in \text{Fix } \sigma^{-1}$

$a \in \text{Supp } \sigma \iff \sigma^{-1}(\sigma(a) \neq a) \iff a \neq \sigma^{-1}(a) \iff a \in \text{Supp } \sigma^{-1}$

(3) $\forall \sigma \in S(E)$ $\forall m \in \mathbb{Z}$

3.1 $\text{Fix } \sigma \subset \text{Fix } \sigma^m$ $\quad$ $\text{Fix } \sigma \subset \text{Fix } \sigma^0 = \text{Fix } Id = E$

3.2 $\text{Supp } \sigma \supset \text{Supp } \sigma^m$

pv (3): $a \in \text{Fix}(\sigma) \iff \sigma^{-1}(\sigma(a) = a)$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \sigma^{-2}(a) = \sigma(a) = a \\
&\Rightarrow \sigma^{-3}(a) = a \\
&\Rightarrow (\sigma^{-m}(a) = a)\sigma^{-m} \quad \forall m \geq 1 \\
&\Rightarrow a = \sigma^{-m}(a) \quad \forall m \geq 1
\end{aligned}$$

Thm Lagrange: $(G, *)$ fini $\quad \forall x \in G \quad x^{|G|} = 1_G$

Ici $\quad G = S(E) \quad |G| = n! \quad$ si $n = |E|$

Donc $\forall \sigma \in S(E) \quad \sigma^{|E|!} = Id \quad m := |E|!$

$\text{Fix } \sigma \subset \text{Fix } \sigma^{|E|!} = \text{Fix } Id = E$

Fait: $E = \mathrm{Fix}\,\sigma \cup \mathrm{Supp}\,\sigma$ disjte

Rappel: $G \subset F \subset E$ ensembles

$E \setminus G \supset E \setminus F$

$$\underbrace{\mathrm{Fix}\,\sigma}_{G} \subset \underbrace{\mathrm{Fix}\,\sigma^m}_{F} \subset \underbrace{E}_{E}$$

$$E \setminus G \supset E \setminus F$$

$$\mathrm{Supp}\,\sigma \supset \mathrm{Supp}\,\sigma^m$$

Prop (4): Pour $\sigma, \sigma' \in S(E)$ on a

4.1 $\mathrm{Fix}\,\sigma\circ\sigma' \supset \mathrm{Fix}\,\sigma \cap \mathrm{Fix}\,\sigma'$

$\Downarrow$

4.2 $\mathrm{Supp}\,\sigma\circ\sigma' \subset \mathrm{Supp}\,\sigma \cup \mathrm{Supp}\,\sigma'$

pv (4.2): Soit $a \in \mathrm{Fix}\,\sigma \cap \mathrm{Fix}\,\sigma'$

càd $\sigma(a) = a$ et $\sigma'(a) = a$

$\Rightarrow \sigma(\sigma'(a)) = \sigma(a) = a$ càd $a \in \mathrm{Fix}\,\sigma\circ\sigma'$

IMP

Prp (5): Si de plus $\mathrm{Supp}\,\sigma \cap \mathrm{Supp}\,\sigma' = \emptyset$ alors égalité

5.1 $\mathrm{Fix}\,\sigma\circ\sigma' = \mathrm{Fix}\,\sigma \cap \mathrm{Fix}\,\sigma'$

$\Downarrow$ ok

5.2 $\mathrm{Supp}\,\sigma\circ\sigma' = \mathrm{Supp}\,\sigma \cup \mathrm{Supp}\,\sigma'$

pv (5.2): On va montrer l'inclusion inverse de 4.2

$$\mathrm{Supp}\,\sigma\circ\sigma' \overset{?}{\supset} \mathrm{Supp}\,\sigma \cup \mathrm{Supp}\,\sigma' \quad \ni a$$

?

pv: On suppose $\mathrm{Supp}\,\sigma \cap \mathrm{Supp}\,\sigma' = \emptyset$

Pour $a \in \mathrm{Supp}\,\sigma \cup \mathrm{Supp}\,\sigma'$

<u>ou bien</u> $a \in \mathrm{Supp}\,\sigma$

<u>ou bien</u> $a \in \mathrm{Supp}\,\sigma'$

car $a \in \mathrm{Supp}\,\sigma$ càd $\sigma(a) \neq a$

mais $a \notin \sigma'$ càd $\sigma'(a) = a$

$\sigma(\sigma'(a)) = \sigma(a) \neq a$

càd $\sigma\circ\sigma'(a) \neq a \Leftrightarrow \mathrm{Supp}\,\sigma\circ\sigma' \ni a$ donc dans ce cas:

<u>Cas 2</u> $a \in \mathrm{Supp}\,\sigma'$, m̂ pve symétrique $\underset{a}{\mathrm{Supp}\,\sigma\circ\sigma'} \supset \mathrm{Supp}\,\sigma \cup \underset{a}{\mathrm{Supp}\,\sigma'}$

$\square$

Prop[*6]: Deux permutations à supports <u>disjoints</u> commutent

pv: Soient $\sigma, \sigma' \in S(E)$, avec $\emptyset = \mathrm{Supp}\,\sigma \cap \mathrm{Supp}\,\sigma'$

Soit $a \in E = \mathrm{Supp}\,\sigma \cup \mathrm{Supp}\,\sigma' \cup \underbrace{(E \setminus (\mathrm{Supp}\,\sigma \cup \mathrm{Supp}\,\sigma'))}_{\text{Fix } \sigma \cap \text{Fix } \sigma' \text{ pts fixés par } \sigma \text{ et par } \sigma'}$

Cas 1: $a \in \mathrm{Supp}\,\sigma$ donc Prop(1) $\sigma(a) \in \mathrm{Supp}\,\sigma$ donc $a \notin \mathrm{Supp}\,\sigma'$

donc $\sigma(a) \in \mathrm{Fix}\,\sigma'$

$$\Rightarrow \sigma'(\sigma(a)) = \sigma(a) = \sigma(\overset{a}{\overset{\shortparallel}{\sigma'(a)}})$$

càd $\sigma' \circ \sigma|_{\mathrm{Supp}\,\sigma} = \sigma \circ \sigma'|_{\mathrm{Supp}\,\sigma}$

Cas 2: $a \in \mathrm{Supp}\,\sigma'$ Symétrique

Cas 3: $a \in \underbrace{E \setminus (\mathrm{Supp}\,\sigma \cup \mathrm{Supp}\,\sigma')}$ càd $a \in \mathrm{Fix}\,\sigma \cap \mathrm{Fix}\,\sigma'$

donc $\left.\begin{array}{l}\sigma(a) = a \\ \sigma'(a) = a\end{array}\right\} \Rightarrow \sigma'(\sigma(a)) = \sigma'(a) = a = \sigma(a) = \sigma(\sigma'(a))$

càd $\sigma \circ \sigma'|_{E_3} = \sigma' \circ \sigma|_{E_3}$

Ex:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 2 & 7 & 5 & 8 & 6 & 9 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Ici $\{1,4,5,8\} = \{\sigma^i(1) : i \in \mathbb{Z}\}$

$a := 1$ $\quad \sigma(1) = 4$ $\quad \sigma(\sigma(1)) = \sigma(4) = 5$

$$\left.\begin{array}{ll} 1 \to 4 \to 5 \to 8 \to 1 & (1,4,5,8) \\ 2 \to 2 & (2) \\ 3 \to 7 \to 9 \to 3 & (3,7,9) \\ 6 \to 6 & (6) \end{array}\right\} \text{Partition de } (1,\dots,9)$$

$$\sigma = (1 \to 4 \to 5 \to 8) \circ \overset{Id}{(2)} \circ (3 \to 7 \to 9) \circ \overset{Id}{(6)} = (1\ 4\ 5\ 8) \circ (3\ 7\ 9)$$

Supp $= \{1,4,5,8\}$ $\quad$ Supp $= \emptyset$ $\quad$ Supp $= \{3,7,9\}$ $\quad$ Supp $= \emptyset$

Déf: Avec $p \geq 2$ un p-cycle c'est $a_1, a_2, \dots, a_p \in E$ distincts et

$$(a_1 \to a_2 \to \dots \to a_{p-1} \to a_p)$$

permutation circulaire à p éléments

$\forall\, a \neq a_1, \dots, a_p$
$\sigma(a) = a$

Ex: σ = composée commutative
- 4-cycle
- 3-cycle

Thm *7: Toute permutation $\sigma \in S(E)$ se décompose de manière unique en produit commutatif: $\sigma = \sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_n$ de cycles à support disjointes

Prop: $a \sim b \overset{\text{déf}}{\iff} \exists\, i \in \mathbb{Z}$ tq $\sigma^i(a) = b$ est une relation d'équivalence ADLY

Déf: $\mathrm{Orbite}_\sigma(a) := \{\sigma^i(a) \in E : i \in \mathbb{Z}\}$

Ex: $\mathrm{Orb}_\sigma(1) = \{1, 4, 5, 8\} = \mathrm{Orb}_\sigma(4) = \mathrm{Orb}_\sigma(5) = \mathrm{Orb}_\sigma(8)$

Prop: Pour $a \in E$ $\quad a \in \mathrm{Fix}\,\sigma \iff |\mathrm{Orb}_\sigma(a)| = 1$
$\quad a \in \mathrm{Supp}\,\sigma \iff |\mathrm{Orb}_\sigma(a)| \geq 2$

Obs: $a \sim b \iff \exists\, i \in \mathbb{Z}\ (\sigma^i(a) = b)$ $\quad \sigma^{-i}$
$\iff b \in \mathrm{Orb}_\sigma(a)$
$\iff \exists\, i \in \mathbb{Z}\ \ a = \sigma^{-i}(b)$
$\iff a \in \mathrm{Orb}_\sigma(b)$

Rip vraie pour toutes les relations d'équivalence
(1) $a \in \mathrm{Orb}_\sigma(a)$ $\qquad i = 0$
(2) $\emptyset \neq \mathrm{Orb}_\sigma(a) \cap \mathrm{Orb}_\sigma(a') \Rightarrow \mathrm{Orb}_\sigma(a) = \mathrm{Orb}_\sigma(a')$

Capture les orbites!

$\bigcup_{a \in E} \{\sigma^i(a) \in E \ \ \forall i \in \mathbb{Z}\} \rightsquigarrow$ décomp. de E en orbites disjointes
partition

Ex: $(1, \dots, 9) = (1, 4, 5, 8) \cup (2) \cup (3, 7, 9) \cup (6)$

Obs : $\{\sigma^i(a)\}_{i\in\mathbb{Z}}$ infini, mais $|E|<\infty$

$\Rightarrow \exists\, i<j$ avec $\sigma^{-i}(\sigma^i(a)=\sigma^j(a))$

$\Rightarrow$ $a=\sigma^{j-i}(a)$

Déf: $n_a := \min\{m\geq 1 : \sigma^m(a)=a\}$

Prop: $Orb_\sigma(a) = \{a, \sigma(a), \sigma^2(a), \dots, \sigma^{n_a-1}(a)\}$

$\sigma^{n_a}(a)=a$

Perm. circ. "cachée" dans $Orb_\sigma(a)$:

$a \to \sigma(a) \to \sigma^2(a) \to \dots \to \sigma^{n_a-1}(a)$

CCL: Chaque σ-orbite "héberge" un cycle de σ, ils sont à supports disjoints donc commutent

Prp: Pour tout $b\in Orb_\sigma(a)$ on a $Orb_\sigma(b)=Orb_\sigma(a)$

UU pour classes d'éq. générale

Résumé: E, $Card\, E<\infty$, $E\xrightarrow{\sigma}E$ bij° $\sigma\in S(E)$ gpe des permut° de E, loi $*=\circ$ = composit°

Q: Décrire une σ générale

Méthode: Regarder toutes les orbites

Découvrir les "atomes" de σ

= des p-cycles "cachés"

= toutes les σ-orbites de Card ≥ 2

Notation: $\{\omega\} = \{\sigma\text{-orbites dans } E\}$

$Fix\,\sigma = \bigcup_{|\omega|=1}\omega$ $\qquad Supp\,\sigma = \bigcup_{|\omega|\geq 2}\omega$

Introduire pour ω avec $|\omega|\geq 2$ la permut° circulaire associée à l'orbite ω : $\sigma_\omega(a) := \begin{cases} a & \text{si } a\notin\omega \\ \sigma(a) & \text{si } a\in\omega\end{cases}$

Ex: $\omega=\{1,4,5,8\}$

$\sigma_\omega(1)=\sigma(1)=4$ $\qquad \sigma_\omega = Id$ ailleurs

$\sigma_\omega(4)=\sigma(4)=5$ $\qquad$ donc $\sigma_\omega(1) = (1\to 4\to 5\to 8)$

$\sigma_\omega(8)=1$

Thm *7 : Avec $\Omega_\sigma = \{\omega$ une σ-orbite de card $\geq 2\} = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ distinctes disjointes

On a $\sigma = \sigma_{\omega_1} \circ \sigma_{\omega_2} \circ \dots \circ \sigma_{\omega_n}$ produit commutatif car les supp sont disjoints

Cette representation est uniq DIFFCL

pv: But: $\forall a \in E$: $\sigma(a) = \sigma_{\omega_1}(a) \circ \dots \circ \sigma_{\omega_n}(a)$

Cas 1: $a \in \operatorname{Fix} \sigma = E \setminus (\operatorname{Supp} \sigma_{\omega_1} \cup \dots \cup \operatorname{Supp} \sigma_n) = E \setminus (\bigcup_{|\omega| \geq 2} \omega)$

$\sigma(a) = a$ et $\sigma_{\omega_1}(a) = a, \dots, \sigma_{\omega_n} = a$

donc $\sigma(a) = a = \sigma_{\omega_1}(\dots(\sigma_{\omega_n}(a))\dots) = a$ donc OK cas 1.

Cas 2: $a \in \operatorname{Supp} \sigma \Rightarrow \exists! i$ $a \in \omega_i$ alors $\sigma_{\omega_i}(a) = \sigma(a)$

$\forall j \neq i$ $a \in \omega_j \Rightarrow \sigma_{\omega_j}(a) = a$ $\forall 1 \leq j \neq i \leq n$

$$\Rightarrow \sigma_{\omega_1} \circ \sigma_{\omega_2} \circ \dots \circ \sigma_{\omega_i} \circ \dots \circ \sigma_{\omega_n}(a) = \sigma_{\omega_i}(\sigma_{\omega_1} \circ \sigma_{\omega_2} \circ \dots \circ \sigma_{\omega_{i-1}} \circ \sigma_{\omega_{i+1}} \circ \dots \circ \sigma_{\omega_n}(a))$$
$$= \sigma_{\omega_i}(a)$$
$$= \sigma(a)$$

donc on a bien $\sigma_{\omega_1} \circ \dots \circ \sigma_{\omega_n} = \sigma$ dans les 2 cas $\square$

Unicité: Si $\sigma = \bar{\sigma}_1 \circ \dots \circ \bar{\sigma}_s$ où les $\bar{\sigma}_j$ sont des cycles à supports disjoints alors $s = r$ et après réénumeration on a $\bar{\sigma}_i = \sigma_{\omega_i}$