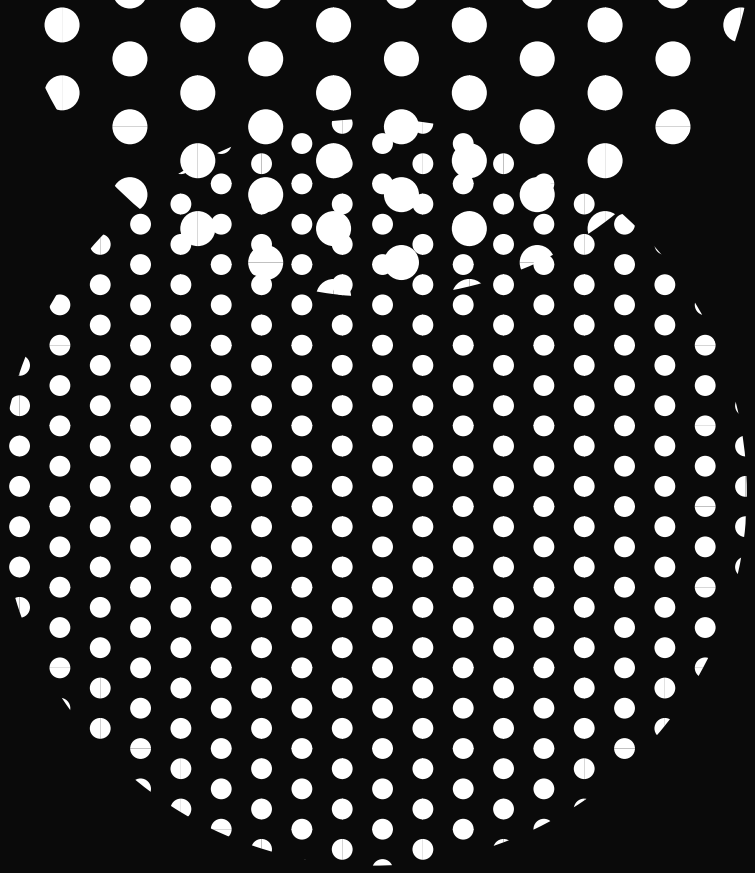

F3 Pxo: 5.3.9

Rappel: $(G, *)$ groupe ssi:

1] $\exists e_G \in G$: $\forall x \in G, e_G * x = x * e_G = x$
2] Loi de comp. interne $\forall x, y \in G, x * y \in G$
inv. 3] $\forall x \in G, \exists y \in G$ tq $x * y = y * x = e_G$
4] associativité: $\forall x, y, z \in G$: $x * (y * z) = (x * y) * z$

e_G est unique !
On raisonne par l'absurde. on suppose $\exists e'_G \in G$ tq
$\forall x \in G, e'_G * x = x * e'_G = x$
et $e'_G \neq e_G$
on a $e'_G * e_G = \begin{cases} e_G \text{ car } e'_G \text{ neutre} \\ e'_G \text{ car } e_G \text{ neutre} \end{cases}$
contrad. !

Exercice 1:

- $(\mathbb{R}, +)$
$\forall x, y \in \mathbb{R}$, $x + y \in \mathbb{R}$ $\xrightarrow{\text{inv}}$
$0 \in \mathbb{R}$ elt neutre. $x + (-x) = (-x) + x = 0$
$x + 0 = 0 + x = 0$
$\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ $x + (y + z) = (x + y) + z \in \mathbb{R}$

- $(\mathbb{R}, \times)$
1 elt neutre
$\nexists y$, tq $0 \cdot y = 1$

Donc il n'y a pas d'inverse de 0.
donc n'est pas un groupe

- $(\mathbb{C}, +)$ gpe

- $(\mathbb{C}^*, \times)$ gpe

- $([0,1], +)$ $1 + 1 = 2 \notin [0,1]$, $+$
donc n'est pas un gpe

- $(\mathbb{R}\setminus\{-1\}, *)$

Elt neutre 0 : $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$ $y = 0$

$x \cdot 0 + x + 0 = x$ ✓

$x, y \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$, $x * y = xy + x + y \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$

$x * y = y * x \rightarrow y * x = yx + y + x = xy + x + y$

$x * y = 0 \Rightarrow xy + x + y = 0 \Leftrightarrow xy + y = -x \Leftrightarrow y(x+1) = -x$

$\Leftrightarrow y = -\frac{x}{x+1}$

$x * \left(\frac{-x}{x+1}\right) = x \cdot \frac{(-x)}{x+1} + \frac{x(x+1)}{x+1} - \frac{x}{x+1}$

$= \frac{-x \cdot x + x \cdot x + x - x}{x+1} = 0$

$(x * y) * z = (xy + x + y)z + xy + x + y + z = xyz + xz + yz + xy + x + y + z$

$x * (y * z) = x \cdot (yz + y + z) + x + yz + y + z = xyz + xy + xz + yz + x + y + z$

Donc $(x * y) * z = x * (y * z)$

- $(\mathbb{Q}[\sqrt{2}]^{\times}, \times)$ où $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]^{\times} = \{a + b\sqrt{2} : (a, b) \in \mathbb{Q}^2\} \setminus \{0\}$

Exercice 3

G - groupe $\quad g \in G,\ h \in G$

$\forall g \ (gh = e_G)$ or G est un gpe, donc $\exists g^{-1} \in G$ tq $g^{-1} = e_G$

$g^{-1}gh = g^{-1}e_G$ on utilise la loi deux coté

$= e_G h = g^{-1} e_G$

$= h = g^{-1}$ □

- $(\mathbb{R}\setminus\{-1\}, *)$ où $x*y = xy + x + y = (x+1)(y+1) - 1$

1) $e = 0 \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$ car $\quad x*0 = x\cdot 0 + x + 0 = x$

$0*x = 0\cdot x + 0 + x = x$

2) Soient $x, y \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$

$x*y = (x+1)(y+1) - 1 \quad \neq -1 \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$

car $\begin{cases} x+1 \neq 0 & \text{car } x \neq -1 \\ y+1 \neq 0 & y \neq -1 \end{cases}$

Exercice 4

G - gpe $\quad \forall g \in G \quad g^2 = g \cdot g = e_G$

donc $g = g^{-1}$

Soit $h \in G$ $\quad$ mq $(gh = hg \mid g^{-1}$

$\Leftrightarrow ghg^{-1} = hgg^{-1}$

$\Leftrightarrow g h g^{-1} = h$

$\Leftrightarrow gg^{-1}h = h \quad \Leftrightarrow hgg^{-1} = h \Leftrightarrow h = h$

$\Leftrightarrow \quad h = h$

$gh \in G$ donc $(gh)^2 = e_G$

$\Rightarrow ghgh = e_G$

$\Rightarrow g[ghgh]h = g e_G h$

$\Rightarrow g^2 (hg) h^2 = g e_G h$

$\Rightarrow e_G \, hg \, e_G = g e_G h$

$\Rightarrow \quad hg = gh$ □

Rappel $\quad \psi : (G_1, *_1) \longrightarrow (G_2, *_2)$

morphisme de groupes ssi :

1) $\psi(e_1) = e_2$
2) $\forall x, y \in G_1, \quad \psi(x *_1 y) = \psi(x) *_2 \psi(y)$

Exercice 6

$\exp : (\mathbb{R}, +) \longrightarrow (\mathbb{R}_{(+)}^{*}, \times)$

1) $\exp(0) = 1$
2) $\forall x, y \quad \exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$