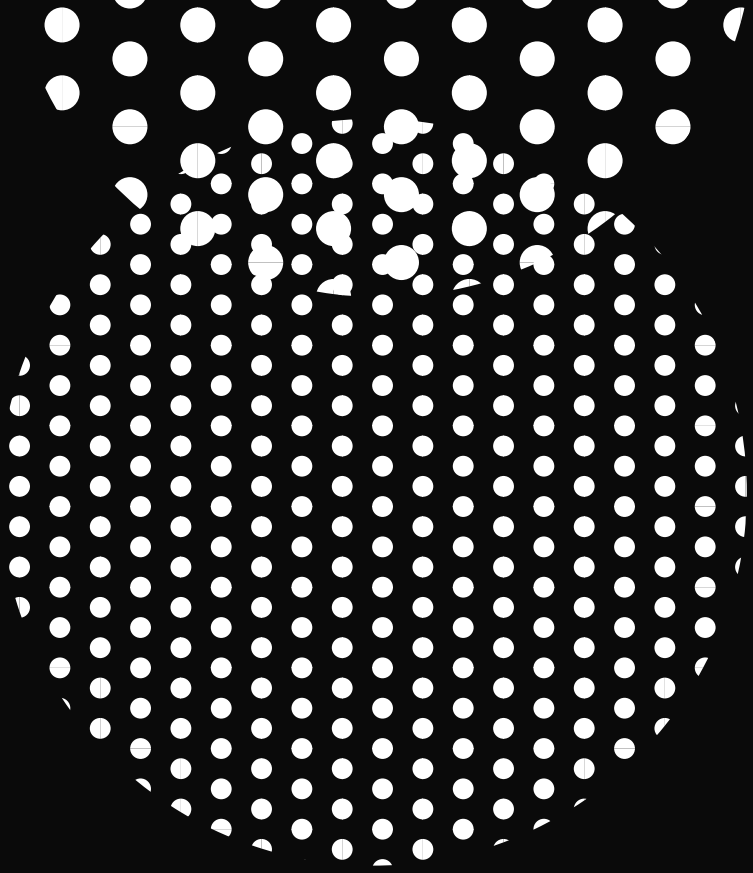

16-20 puis sdu F2

Exercice 16

Soit $n \geq 1$ et $a \in \mathbb{Z}$

$o(x^c) = \dfrac{o(x)}{pgcd(c, o(x))}$

$o(x) = n = |\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}|$

a) $\bar{a} = 1 \cdot a = 1^a = \dfrac{o(1)}{pgcd(a, o(1))} = \dfrac{n}{pgcd(a,n)} = o(a)$

b) a génère $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ssi $o(a) = |\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}| = n$

$\dfrac{n}{pgcd(a,n)} = n \iff \underline{pgcd(a,n) = 1}$

c) les générateurs sont tels a tq $a \wedge 12 = 1$

$\Rightarrow a = 5, 7, 11$

$o(3) = \dfrac{12}{3 \wedge 12} = \dfrac{12}{3} = 4$

$o(5) = \dfrac{12}{5 \wedge 12} = \dfrac{12}{1} = 12$

$o(6) = \dfrac{12}{6 \wedge 12} = \dfrac{12}{6} = 2$

$o(9) = \dfrac{12}{9 \wedge 12} = \dfrac{12}{3} = 4$

d) Par le thm de Lagrange $\overset{\text{ss gpe}}{|H|} \mid |G|$

alors $|H| \mid |\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}|$

les cards : 1, 2, 3, 4, 6, 12

les ss-gpes : $\mathbb{Z}/1\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$
$\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$

Exo 16 Sol de Prof

Soit $n \geq 1$ et $a \in \mathbb{Z}$

1) Dans $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$, on a :

$o(a) = \min\{k \in \mathbb{N}^* \text{ tq } ka \equiv 0 \mod n\}$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tq $ka \equiv 0 \mod n \iff n \mid ka$ (*)

On pose $d = \text{pgcd}(n,a)$ et $\begin{cases} a' = \frac{a}{d} \in \mathbb{Z} \\ n' = \frac{n}{d} \in \mathbb{N} \end{cases}$ et $a' \wedge n' = 1$

(*) $\iff n'd \mid kda'$

$\iff n' \mid ka'$

$\iff n' \mid k$ par gauss

D'où $o(a) = n' = \dfrac{n}{\text{pgcd}(n,a)}$

2) a generateur $\iff o(a) = n$

$\iff a \wedge n = 1$ (par 1)

3) $\varphi(12) = \varphi(3)\varphi(2^2) = 2(2-1)(3-1) = 4$

générateurs : $\{\bar{1}, \bar{5}, \bar{7}, \overline{11}\}$

Si $x \in \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ alors $o(x) \mid 12$

$o(3) = \dfrac{12}{3 \wedge 12} = \dfrac{12}{3} = 4$

$o(5) = \dfrac{12}{5 \wedge 12} = \dfrac{12}{1} = 12$

$o(6) = \dfrac{12}{6 \wedge 12} = \dfrac{12}{6} = 2$

$o(9) = \dfrac{12}{9 \wedge 12} = \dfrac{12}{3} = 4$

4) $\{\bar{0}\}$, $\{\bar{0}, \bar{6}\}$ $\{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \overline{10}\}$ $\{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}\}$ $\{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}\}$ $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$

Exercice 20

Soit G un gpe qui admet seulement 2 ss-gpes lui même et $\{e_G\}$

Soit H ss-gpe, par le thm de Lagrange $|H| \mid |G|$, par hyp $|H| = |G|$ et $|H| = 1$, d'où $|G|$ est premier.

Or $|G|$ premier, alors $\forall a \in G$ $a \wedge |G| = 1 \Rightarrow \forall 1 \leq i < j \leq |G|$ $a^i \neq a^j$ et $a^{|G|} = a$

D'où a est un générateur mais comme $a \in G$ et G un gpe donc $a^i \in G$ et $a^j \in G$, donc G cyclique.

Card G est premier donc fini.

Sol de Prof

<u>si G fini</u> $\# G = n \geq 2$

Soit $x \in G$, $x \neq e$

on a : $\langle x \rangle = G \Rightarrow$ cyclique

- On suppose $\exists d \mid n$, $d \neq 1, n$;

  On suppose $\exists d \mid n$ $d \neq 1, n$

  alors $x^d \neq e, x$ et $\langle x^d \rangle = G$

  et $\# \langle x^d \rangle \leq \frac{n}{d} < n$

  $\geq 2 > 1$ contradiction, donc $n \in \mathcal{P}$

- mq G est fini :

  Soit $x \in G$, $x \neq e$

  - si $x^2 = e$, $G = \{1, x\}$ donc fini
  - sinon $x^2 \neq x$ et $x^2 \neq e$

    et $\langle x^2 \rangle = G$ car $x^2 \neq e$

donc $\exists k \in \mathbb{Z}$ tq $x^{2k} = x \Leftrightarrow x^{2k-1} = e$

d'où G fini

Exercice 19

Dans $\mathbb{C}^*$: $z^4 = 1 \iff z^4 - 1 = 0$

$\iff (z^2-1)(z^2+1) = 0$

$\iff (z-1)(z+1)(z-i)(z+i) = 0$

$\iff z \in \{\pm 1, \pm i\}$

dans $\mathbb{R}^*$: $x^4 = 1 \iff x^4 - 1 = 0$

$\iff (x^2-1)\underbrace{(x^2+1)}_{>0} = 0$

$\iff x^2 - 1 = 0 \iff x \in \{\pm 1\}$

par l'absurde on suppose que $\varphi : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{R}^*$ isomorphisme

on a $\varphi(1) = 1$

$\varphi(-1) \neq 1$ et $\varphi((-1)^2) = \varphi(-1)^2 = \varphi(1) = 1$

donc $\varphi(-1) = -1$

$\varphi(i) \neq 1, -1$

$\varphi(i^4) = \varphi(i)^4 = \varphi(1) = 1$

donc $\varphi(i) \in \{\pm 1\}$ impossible

Donc $\mathbb{C}^*$ et $\mathbb{R}^*$ ne sont pas isomorphes