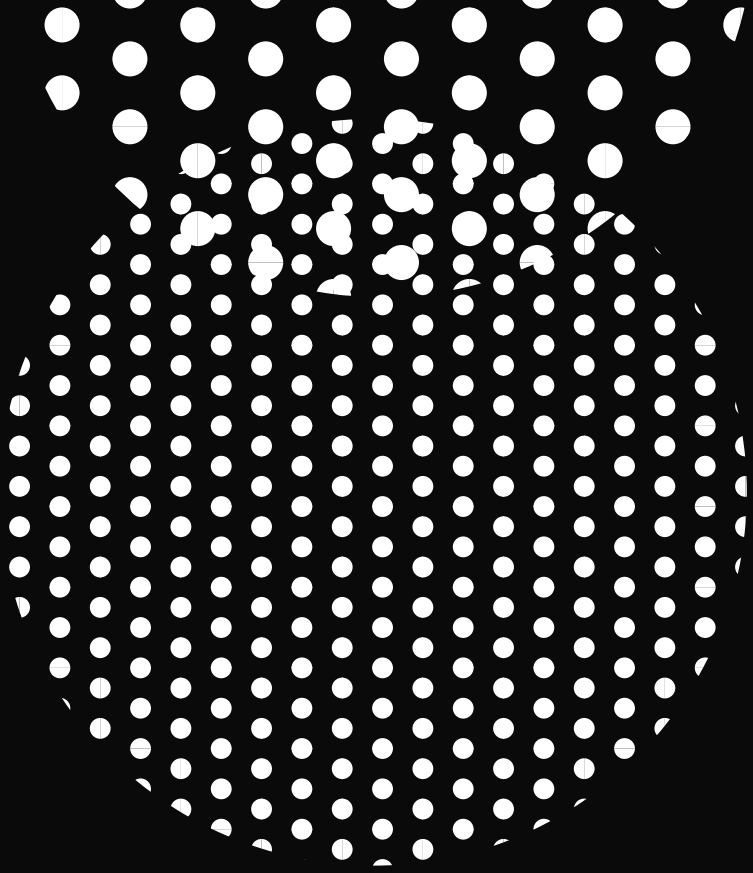

8, 19, 23, 24

Exercice 8

• $2019^{2020^{2021}} \equiv (-1)^{2020^{2021}} \mod 10$ car $2020^{2021} \equiv 0 \mod 2$

donc le dernier chiffre est 1

• $2017^{2018^{2019}}$ $\quad (2017) \equiv -3 \mod 10$

$(-3)^1 \equiv -3 \mod 10$

$(-3)^2 = 9 \equiv -1 \mod 10$

donc $(-3)^4 \equiv 1 \mod 10$

d'où on est ramené à calculer

$2018^{2019} \equiv 2^{2019} \mod 4$

$\equiv 0 \mod 4$ car $4 = 2^2 \mid 2^{2019}$

donc $2017^{2018^{2019}} = 1 \mod 10$

donc le dernier chiffre est 1

Exercice 19

a) $51x + 14y = 0$

$51x = -14y$

$3 \cdot 17 \cdot x = -2 \cdot 7 \cdot y$

Par le thm de Gauss $2 \cdot 7 \mid x$ car $2 \cdot 7 \wedge 3 \cdot 17 = 1$

$3 \cdot 17 \mid y$

donc $\exists x', y'$ tq $(E) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \cdot 7 \cdot x' \\ y = 3 \cdot 17 \cdot y' \end{cases}$

Donc $(E) \Leftrightarrow 3 \cdot 17 \cdot 2 \cdot 7 \cdot x' = -2 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 17 \cdot y'$

$\Leftrightarrow x' = -y'$

$\Leftrightarrow (x', y') \in \{(k, -k), k \in \mathbb{Z}\}$

Donc $S = \{(2 \cdot 7k, -3 \cdot 17 \cdot k), k \in \mathbb{Z}\}$

Méthode générale:

Si on veut résoudre $ax+by=c$ $\begin{cases} \text{avec } a,b,c \in \mathbb{Z} \\ (x,y) \in \mathbb{Z}^2 \end{cases}$

1) trouver une solution par bézout $(x_0,y_0) \in \mathbb{Z}^2 : ax_0+by_0=c$

2) E $a(\underbrace{x-x_0}_{X}) + b(\underbrace{y-y_0}_{Y}) = 0$

Donc on résout $aX+bY=0$ (E')
comme dans a)

3) On a: $\begin{cases} x = X+x_0 \\ y = Y+y_0 \end{cases}$ avec $(X,Y) \in S'$

b) $51x+21y=1$

donc (E) $\Leftrightarrow$ $3\cdot(17x+7y)=1$
et $3 \nmid 1$ donc $S=\emptyset$

c) $27x+33y=60$ $\quad | :3$

$9x+11y=20$ $\qquad (x,y)=(1,1) \Rightarrow 9\cdot 1+11\cdot 1 = 9+11=20$

$9x+11y=1$

$11 = 9+2$ $\qquad 2 = 11-9$

$9 = 2\cdot 4+1$ $\qquad 1 = 9-4\cdot 2$

$2 = 1\cdot 2+0$ $\qquad = 9-4\cdot(11-9)$

$= 9+4\cdot 9-4\cdot 11$

$= 5\cdot 9-4\cdot 11$

$x=5 \qquad y=-4$

$9x+11y=1$

$(9\cdot 5+11(-4)=1 \mid \cdot 20$

$9\cdot 100+11(-80)=20$

$S = (\underset{x_0}{100}, \underset{y_0}{-80})$

Sol de prof

$$27x + 33y = 60$$
$$\Leftrightarrow 9x + 11y = 20$$

On voit que $x_0 = 1$ et $y_0 = 1$ est solution

D'où $9 \cdot (x - x_0) + 11 \cdot (y - y_0) = 0$

On pose $\begin{cases} X = x - x_0 \\ Y = y - y_0 \end{cases}$

Donc $(E) \Leftrightarrow 9X + 11Y = 0 \Leftrightarrow 9X = -11Y$

par le lemme de Gauss $\begin{cases} 11 \mid X \\ 9 \mid Y \end{cases}$ car $9 \wedge 11 = 1$

... ⚠ comme dans A

Donc $(X, Y) \in \{(11k, -9k), k \in \mathbb{Z}\}$

d'où $(x, y) \in \{(11k + x_0, -9k + y_0), k \in \mathbb{Z}$

Donc $S = \{(11k + 100, -9k - 80), k \in \mathbb{Z}\}$

d) $26x + 15y = 4$ $(-1, 2)$

$26 = 15 \cdot 1 + 11$
$15 = 11 \cdot 1 + 4$
$11 = 4 \cdot 2 + 3$
$4 = 3 + 1$

$1 = 4 - 3$
$1 = 4 - (11 - 2 \cdot 4)$
$1 = 3 \cdot 4 - 11$
$1 = 3 \cdot (15 - 11) - (15 - 4)$
$1 = 3 \cdot 15 - 3 \cdot 11 - 15 + (15 - 11)$
$1 = 3 \cdot 15 - 4 \cdot 11$
$1 = 3 \cdot 15 - 4 \cdot (26 - 15)$
$1 = 3 \cdot 15 - 4 \cdot 26 + 4 \cdot 15$
$1 = 7 \cdot 15 - 4 \cdot 26$

$4 = \underbrace{28}_{y_0} \cdot 15 - \underbrace{16}_{x_0} \cdot 26$

$4 = \underbrace{-16}_{x_0} \cdot 26 + \underbrace{28}_{y_0} \cdot 15$ $\qquad (-26 + 2 \cdot 15) = 4$

$(x_0, y_0) = (-16, 28)$

d'où $(x_0, y_0) = (-16, 28)$

D'où $(E) \Leftrightarrow 26(x - x_0) + 15(y - y_0) = 0$

par Gauss $26 \mid y - y_0$ car $26 \wedge 15 = 1$

$15 \mid x - x_0$

⚠ ...

D'où $S = \{ (15k - 16, -26k + 28), k \in \mathbb{Z} \}$

<u>Exo 23</u>

On raisonne par l'absurde

On suppose qu'il existe un nbre fini de nbrs premiers de la forme $4k-1$, $k \in \mathbb{N}^*$

On les note $u_1, \dots, u_n$

On pose $N = 4 \cdot u_1 \cdot u_2 \dots u_n - 1$

a) On a : $N \equiv -1 \mod 2$ donc $2 \nmid N$

Soit $1 \leq i \leq n$

On a $N \equiv -1 \mod u_i$ donc $u_i \nmid N$

b) $\underbrace{\mathcal{P}}_{\text{ensemble des nbrs premiers}} = \{2\} \cup \{ p \in \mathcal{P} / \exists k \in \mathbb{N}^* \text{ tq } p = 4k+1 \} \cup \underbrace{\{ p \in \mathcal{P} / \exists k \in \mathbb{N} \text{ tq } p = 4k-1 \}}_{= \{u_1, \dots, u_n\}}$

On a $N > 1$, donc $\forall p \in \mathcal{P}$ tq $p \mid N$

(il y en a au moins un)

avec $p \in \mathbb{N}^*$ car par a) $p \neq 2, u_1, \dots, u_n$

c) pour 6) et le thm de décomposition en facteurs premiers

$N = \prod_{k \in K} (4k+1)^{\alpha_k}$ avec $K \subset \mathbb{N}^*$

$|K| < \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tq $\alpha_k > 0$ si $k \in K$

donc $N \equiv \prod_{k \in K} 1^{\alpha_k} \mod 4$

$\equiv 1 \mod 4$

d) On a $N = 4u_1 \cdots u_n - 1$

$\equiv -1 \mod 4$

et $1 \not\equiv -1 \mod 4$: contradiction

donc il exist une infinité de nbs premiers de la forme $4k-1$, $k \in \mathbb{N}^*$

e) si $a \wedge b = d > 1$

$\exists a', b' \in \mathbb{Z}$ tq $\begin{cases} a = da' \\ b = db' \end{cases}$

donc $ak+b = \underbrace{d}_{>1}(\underbrace{a'k + b'}_{>1})$ donc composé $\forall k \in \mathbb{N}^*$

$\boxed{CN}$: $a \wedge b = 1$

<u>exercice 24:</u>

Soit $p \in \mathcal{P}$

On raisonne par l'absurde

On suppose $\exists (u,v) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ tq $\sqrt{p} = \frac{u}{v}$

a) on pose $d = pgcd(u,v)$

donc $\exists (u', v') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ tq $\begin{cases} u = du' \\ v = dv' \end{cases}$

d'où $\sqrt{p} = \frac{du'}{dv'} = \frac{u'}{v'}$ et $u' \wedge v' = 1$

Dans la suite, on suppose que $u \wedge v = 1$

b) $\sqrt{p} = \frac{u}{v} \Rightarrow p = \frac{u^2}{v^2}$

$\Rightarrow pv^2 = u^2$

$\Rightarrow p \mid u^2$ car $p \in \mathcal{P}$

lemme de gauss $\Rightarrow p \mid u$ ou $p \mid u \Rightarrow p \mid u$

c) Donc $\exists u' \in \mathbb{Z}$ tq $u = pu'$

Donc $pv^2 = u^2 \Rightarrow pv^2 = p^2u'^2$

$\Rightarrow v^2 = pu'^2$

$\Rightarrow p \mid v^2$

$\Rightarrow p \mid v$ par lm

Contradiction $u \wedge v = 1$

Donc $\sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$