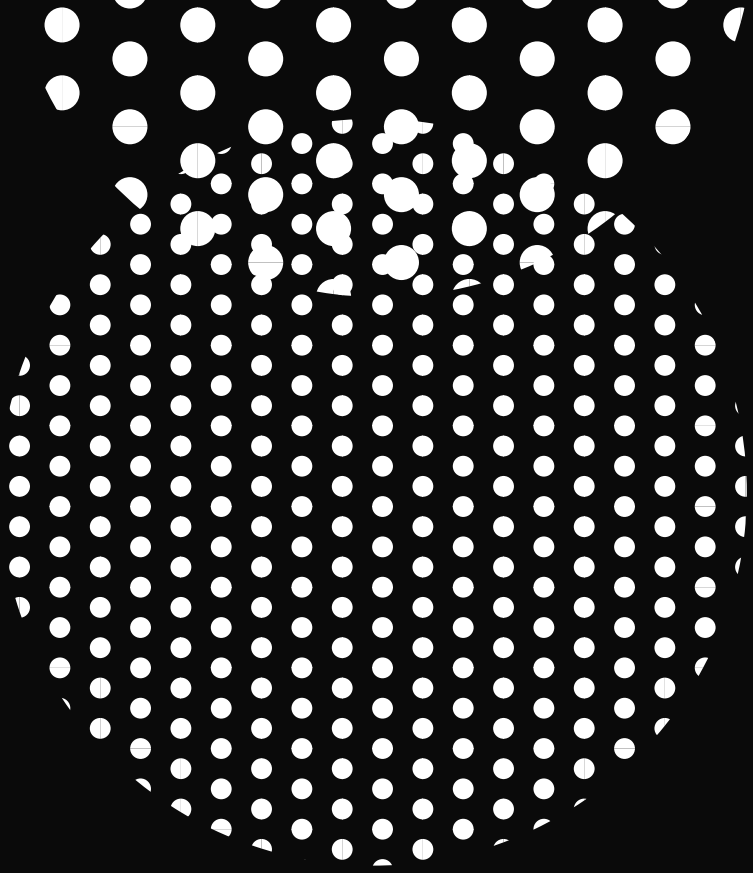

Facto : 1, 2, 4, 7, 8, 11

Exo 1

Déterminez $x \in \mathbb{Z}$, $x \neq 5$ tq $x-5 \mid x+7$

$\iff$

$x+7 \equiv 0 \mod (x-5)$

$\iff (x+7)-(x-5) \equiv 0 \mod (x-5)$

$\iff 12 \equiv 0 \mod (x-5)$

$\iff x-5 \mid 12 = 2^2 \cdot 3$

$\iff x-5 \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\}$

$\iff x \in \{-7, -1, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11\}$

Exo 2 Soit $x \in \mathbb{Z} \setminus \{4\}$

$x+9 \equiv 0 \mod x-4$

$\iff (x+9)-(x-4) \equiv 0 \mod x-4$

$\iff 13 \equiv 0 \mod x-4$

$\iff x-4 \mid 13$

$\iff x-4 \in \{-13, -1, 1, 13\}$

$\iff x \in \{-9, 3, 5, 17\}$

Exo 2 Soit $n \in \mathbb{N}$

$n+1 \mid n^2+1$

$\iff n^2+1 \equiv 0 \mod n+1$

$\iff (n^2+1)-(n+1)^2 \equiv 0 \mod n+1$

$\iff n^2+1-n^2-2n-1$

$\iff -2n \equiv 0 \mod n+1$

$\iff -2n+2(n+1) \equiv 0 \mod n+1$

$\iff 2 \equiv 0 \mod n+1$

$\iff n+1 \mid 2$

$\iff n \in \{0, 1\}$

Exo 4 Soit $n \in \mathbb{N}$

a) $n(n+1)(n+2) \equiv 0 \mod 6$

cas $0(0+1)(0+2) = 0 \Rightarrow$ est divisible par 6

$n \equiv 0 \mod 6$

donc $n = 6n'$

est $n(n+1)(n+2) = 6n'(n+1)(n+2)$ donc divisible

cas $n \equiv 1 \mod 6$

donc $n+5 = 6n'$

$\Leftrightarrow n = 6n' - 5$

$(6n'-5)(6n'-4)(6n'-3)$

$= 36n'^2 - 24n' - 18n' + 12$

$= 36n'^2 - 42n' + 12 = 6(6n'^2 - 7n' + 2)$ donc est divisible par 6

De plus $(6n'-4)(6n'-3)$ est toujours divisible par 6 $\forall n' \in \mathbb{N}$

cas $n \equiv 2 \mod 6$

$n+4 = 6n'$

$n = 6n' - 4$

$\underline{(6n'-4)(6n'-3)}(6n'-2)$

De $\downarrow$ est divisible par 6, donc $6 \mid n(n+1)(n+2)$ quand $n \equiv 2 \mod 6$

cas $n \equiv 3 \mod 6$

donc $n+3 = 6n' \Leftrightarrow n = 6n' - 3$

$(6n'-3)(6n'-2)(6n'-1)$

$(36n'^2 - 18n' - 12n' + 6)(6n'-1)$

$= 6(6n'^2 - 3n' - 2n' + 1)(6n'-1)$

Donc est divisible par 6

Cas $n \equiv 4 \mod 6$

$n+2 = 6n'$

$n = 6n'-2$

$(6n'-2)(6n'-1)(6n')$

Donc est divisible par 6

cas $n \equiv 5 \mod 6$

donc $n+1 = 6n'$

donc $n = 6n'-1$

Donc $(6n'-2)(6n')(6n'+1)$

Donc divisible par 6

Donc $n(n+1)(n+2)$ est divisible par 6 $\forall n \in \mathbb{N}$

a) $6 \mid n(n+1)(n+2)$

$\Leftrightarrow 2 \mid n(n+1)(n+2)$ (*) car $6 = 2 \cdot 3$

$\Leftrightarrow 3 \mid n(n+1)(n+2)$ (**) et $pgcd(2,3) = 1$

(P) Soit $k \geq 1$, on sait que k divise l'un des $n(n+1)(n+2)\dots(n+k-1)$ (car consecutif)

(*) $2 \mid n(n+1)$ par (P)

(*) $3 \mid n(n+1)(n+2)$ par (P)

b) $24 \mid n(n+1)(n+2)(n+3)$

$\Leftrightarrow 3 \mid n(n+1)(n+2)(n+3)$ (*)

et $8 \mid n(n+1)(n+2)(n+3)$ (**)

(*) par a

(**) par (P) 4 divise l'un des $n, n+1, n+2, n+3$

par (P) 2 divise 2 des $n, n+1, n+2, n+3$

car $2 \mid n$ ou $n+1$

$2 \mid n+2$ ou $n+3$

donc 4 divise l'un des termes et 2 divise un autre des termes donc $8 \mid n(n+1)(n+2)(n+3)$

c) $120 \mid n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$

$\Leftrightarrow 24 \mid n(n+1)\dots(n+4)$ par (B)

et $5 \mid n(n+1)\dots(n+4)$ par (P)

car $5 \cdot 24 = 120$ et $5 \wedge 24 = 1$

$\binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!}$

d) Soient $p \geq 1$ et $n \geq 1$

$$n \cdot \ldots \cdot (n+p-1) = \frac{(n+p-1)!}{(n-1)!} = \underbrace{\binom{n+p-1}{n-1}}_{\in \mathbb{N}} \cdot p!$$

donc $p! \mid n \cdot \ldots \cdot (n+p-1)$

Exo 7

a) 2^{17} divise par 3

$$2^{17} \equiv (-1)^{17} \mod 3$$
$$\equiv -1 \mod 3$$
$$\equiv 2 \mod 3$$

$a+b+c = 3 \Rightarrow 3 \mid a \cdot b \cdot c$

$$abc = a \cdot 100 + b \cdot 10 + c$$
$$99a + 9b + b + c$$
$$+a = (99a + 9b) + (a+b+c)$$

b) 5^5 divisé par 7

$$5^5 \equiv (-2)^5 \mod 7$$
$$\equiv -32 \mod 7$$
$$\equiv 3 \mod 7$$

c) $111370 \equiv 1+1+1+9+7+0 \mod 9$

$$\equiv 19 \mod 9$$
$$\equiv 1 \mod 9$$

Exo 9

Soit $a \in \mathbb{Z}$ tq $a \equiv 7 \mod 12$

$\iff a - 7 = 12k$

$\iff a = 12k + 7$

$\iff a = (4k)\cdot 3 + 7$

$\iff a = (4k)\cdot 3 + (2\cdot 3 + 1)$

$\iff a = (4k+2)3 + 1$

Donc $a \equiv 1 \mod 3$ 3

On suppose que $a = 48l + b$ avec $l, b \in \mathbb{Z}$ tq $0 \leq b < 48$

$a \equiv b \ [12]$

$\equiv 7$

donc $b \in \{7, 9, 31, 43\}$

Exercice 11

Soit $n \in \mathbb{Z}$

$n^2 \equiv \quad \mod 8$

$n \equiv \{0,1,2,3,4,5,6,7\} \mod 8$

donc $\{0, 1, 4,\}$

Par l'absurd, soit $n \equiv 7 \mod 8$ tq $a^2+b^2+c^2$ $a, b, c \in \mathbb{Z}$

$I \left\{ a^2+b^2+c^2 \mod 8 \right\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

donc $n \notin I$ contradiction