



Exo 1 c) Montrer déterminer $x \in \mathbb{Z}$ tq $x+2 \mid 4x+6$

On sait que si $(a \mid b \text{ et } b \mid c) \Rightarrow a \mid c$ avec $a, b, c \in \mathbb{Z}$

donc

$$4x+6 \equiv 0 \pmod{x+2}$$

$$\Leftrightarrow 4x+6 - 4(x+2) \equiv 0 \pmod{x+2}$$

$$\Leftrightarrow -2 \equiv 0 \pmod{x+2}$$

$$\Leftrightarrow x+2 \mid -2$$

$$\Leftrightarrow x+2 \in \{-2, -1, 1, 2\}$$

$$\Leftrightarrow x \in \{-4, -3, -1, 0\}$$

Exo 2 $n+1 \mid n^2+1$ $n \in \mathbb{N}$

$$n^2+1 \equiv 0 \pmod{n+1}$$

$$a \mid b \Leftrightarrow b = ak$$

$$\Leftrightarrow b - a^2 = ak - a^2$$

$$\Leftrightarrow b - a^2 = a(k - a)$$

$$\Leftrightarrow a \mid b - a^2$$

$$\text{Donc } (n^2+1) - (n+1)^2 \equiv 0 \pmod{n+1}$$

$$\Leftrightarrow n^2+1 - n^2 - 2n - 1 \equiv 0 \pmod{n+1}$$

$$\Leftrightarrow -2n \equiv 0 \pmod{n+1}$$

$$\Leftrightarrow -2n + 2n + 2 \equiv 0 \pmod{n+1}$$

$$\Leftrightarrow 2 \equiv 0 \pmod{n+1}$$

$$\Leftrightarrow n+1 \mid 2$$

$$\Leftrightarrow n+1 \in \{1, 2\}$$

$$\Leftrightarrow n \in \{0, 1\}$$

Exo 9 Soit $n \in \mathbb{N}$

$$a) 6 \mid n(n+1)(n+2)$$

On démontre que $n(n+1)(n+2)$
est divisible à la fois par 2 et par 3

$$\begin{array}{l} 2 \mid n(n+1)(n+2) \\ 3 \mid n(n+1)(n+2) \end{array} \quad \text{car } \underline{n(n+1)(n+2) \text{ consécutifs}}$$

$$\text{Si } (a \mid c \text{ et } b \mid c \text{ et } a \wedge b = 1) \Rightarrow a \wedge b \mid c$$

$$\text{rv: } c = a \cdot k \quad b = b' \cdot k'$$

$$a \mid b \cdot k' \quad \text{par le thm de Gauss} \\ \text{or } a \wedge b = 1 \text{ donc } a \mid k'$$

$$\text{donc } k' = a \cdot m$$

$$\text{Donc } c = b \cdot k' = b \cdot a \cdot m$$

$$\text{Donc } c \text{ est divisible par } a \cdot b$$

$$\text{Donc } 6 \mid n(n+1)(n+2)$$

b) Montrer que $24 \mid n(n+1)(n+2)(n+3)$

il faut montrer que

$$3 \mid n(n+1)(n+2)(n+3) \quad (*)$$

$$8 \mid n(n+1)(n+2)(n+3) \quad (**)$$

(*) est démontré par a)

(**)

$$\begin{array}{l} 2 \mid n \quad \text{ou} \quad 2 \mid n+1 \quad \vdots \\ 2 \mid n+2 \quad \text{ou} \quad 2 \mid n+3 \end{array} \quad \text{car nombres consécutifs}$$

alors, un est divisible par 2 et l'autre par 4
donc $\underset{2 \cdot 4}{8 \mid n(n+1)(n+2)(n+3)}$

$$c) \quad 120 \mid n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$$

$$3 \cdot 5 \cdot 8 \mid n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$$

$$\begin{array}{l} 24 \mid \text{-----} \\ 5 \mid \text{-----} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{est démontré par b)} \\ \text{car nombres consécutifs} \end{array}$$

$$d) \quad \text{pour } p \geq 1 \quad p! \mid n(n+1)(n+2) \dots (n+p-1)$$

$$\begin{aligned} n(n+1) \dots (n+p-1) &= \frac{(n+p-1)!}{(n-1)!} = \binom{n+p-1}{n-1} \cdot p! \\ &= \frac{(n+p-1)!}{(n-1)!(n+p-1-(n-1))!} \cdot p! \\ &= \frac{(n+p-1)!}{(n-1)!(n+p-1-n+1)!} \cdot p! \\ &= \frac{(n+p-1)!}{(n-1)! \cdot 1!} \cdot p! \end{aligned}$$

$$\binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!}$$

$$\text{Donc } p! \mid n(n+1)(n+2) \dots (n+p-1)$$

Exercice 19

$$c) \quad 27x + 33y = 60 \quad | :3$$

$$9x + 11y = 20 \quad \text{on voit que } (x, y) = (1, 1) \Rightarrow 9(1) + 11(1) = 20$$

$$\text{Donc } (x_0, y_0) = (1, 1)$$

$$\text{On pose } (X, Y) = (x - x_0, y - y_0)$$

$$S = (100, -80) = (x_0, y_0)$$

$$9X + 11Y = 0$$

$$\Leftrightarrow 9X = -11Y \quad \text{or } 9 \nmid 11 \Rightarrow 11 \mid X$$

$$\text{donc } 9 \mid Y \quad \text{et } 11 \mid X$$

$$\Rightarrow \exists x', y' \quad \begin{cases} Y = 9y' \\ X = 11x' \end{cases}$$

$$\Rightarrow 9 \cdot 11 \cdot x' = -11 \cdot 9 \cdot y'$$

$$\Leftrightarrow x' = -y'$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (Y, X) = (11 \cdot k, -9k) \end{cases} \quad \text{d'où } (x, y) = \begin{cases} (x_0 + x', y_0 + y') \\ = (11k + 100, -9k - 80) : k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

