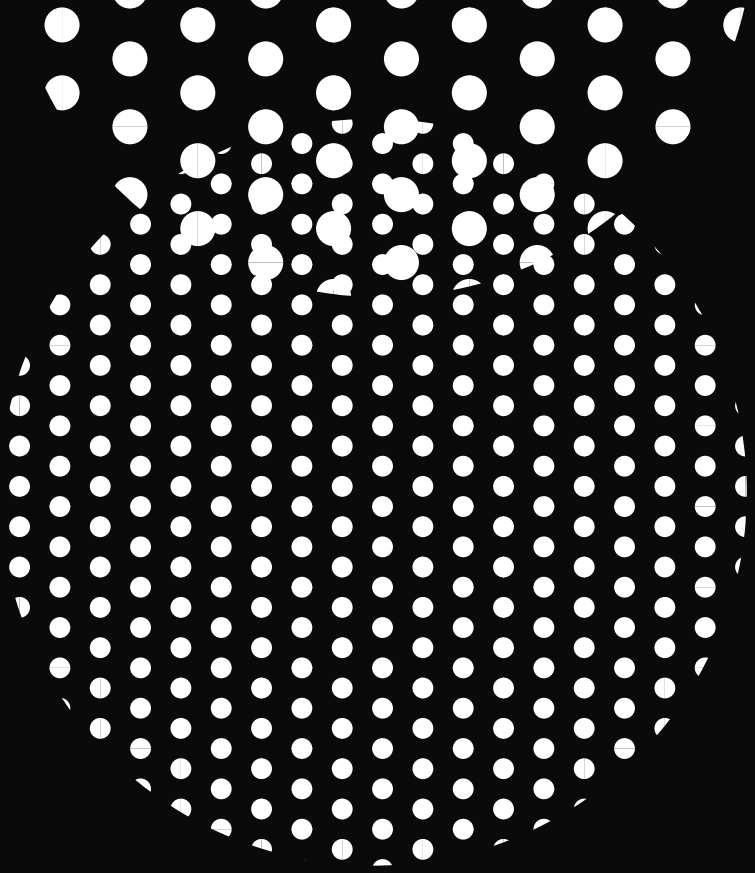


Déf: Soit $A=(A,+,\times)$. On note
$A^\times = \{a \in A : \exists a' \in A \text{ avec } aa' = 1_A\}$ groupe des inversibles de A

Ex: $\mathbb{Z}^\times = \{-1, 1\}$ **Ex:** $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\bar{a} : a \wedge n = 1\}$

Bézout*: $\exists u, v \in \mathbb{Z}$ $(au + nv = 1) \mod n$
$\bar{a}\bar{u} = 1$

Si $\bar{a} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tq $a \wedge n = 1$ Alors il existe inverse de $\bar{a}$. pr par Bézout

Ass°: $(A^\times, \times)$ est un groupe

Obs: a' unique

Pbm: Bcp de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
Comparer entre eux?

Idée: $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \rightsquigarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Préliminaire théorique:

Produit des anneaux

Déf: A, B anneaux commutatifs, $(A, +_A, \times_A)$, $(B, +_B, \times_B)$ (commutatifs)

$A \times B := \{(a,b) : a \in A, b \in B\}$
$(a,b) + (a',b') := (a+a', b+b')$
$(a,b) \times (a',b') := (a \times a', b \times b')$

$1_{A\times B} = (1_A, 1_B)$
$0_{A\times B} = (0_A, 0_B)$

Prp: Le gpe (groupe) des inversibles $(A \times B)^\times = A^\times \times B^\times$
NV: $(a,b) \times (a',b') = (aa', bb') = (1,1)$
a' inverse de a, b' inverse de b

$|\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}| = mn$ $|\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}| = m$ $|\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}| = n$
$\{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{n-1}\}$

Rappel: E, $|E| < \infty$, F, $|F| < \infty$

E $\Rightarrow$ $|E \times F| = |E| \cdot |F|$

? même chose ?

Ici: $|\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}| = m \cdot n = |\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}|$

Iso := "le même" MORPHISME = "application conservant la forme"

Isomorphismes:

$$\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \xrightarrow[\text{bijection}]{f} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

morphisme d'anneaux

Morphisme respecte les lois entre 2 structures
$(A,\cdot)$ $(B,\times)$
$f: A \to B$
morphisme: $a_1, a_2 \in A$
$\to f(a_1 \cdot a_2) = f(a_1) \times f(a_2)$
$\to f(e_A) = e_B$

Déf*: Un morphisme d'anneaux, c'est une appl

$$(A, +_A, \times_A) \xrightarrow{f} (B, +_B, \times_B)$$

Satisfaisant

(1) $f(a +_A a') = f(a) +_B f(a') \quad \forall a, a' \in A$

(2) $f(a \times_A a') = f(a) \times_B f(a')$

(3) $f(0_A) = 0_B$

(4) $f(1_A) = 1_B$

Si de plus $A = B$, $+_A = +_B$ et $\times_A = \times_B$ donc on appelle cet isomorphisme: Automorphisme

Iso-morphisme
↳ bijective
= morphisme bijective

Rq: Si f bijective, on dit isomorphisme

Déf: Noyau déf $\ker f := \{a \in A : f(a) = 0_B\}$
Image déf $\operatorname{Im} f := \{b \in B : \exists a \in A, f(a) = b\}$
$:= \{f(a) \in B : a \in A\}$

$= (A, +_A, \times_A)$
$B \subset A$ ss-anneaux
si $b_1, b_2 \in B$ $b_1 +_A b_2 \in B$
$b_1 \times_A b_2 \in B$
$1_A \in B$
$0_A \in B$

Déf: Un sous-anneau B d'un anneau A, c'est un ss.ensemble satisfaisant
(1) $\forall b, b' \in B \quad b +_A b' \in B$
(2) $\forall b, b' \in B \quad b \times_A b' \in B$
(3) $1_A \in B$, $0_A \in B$

Simplement c'est un ss-ensemble de A qui garde les lois internes de A

Fait: $(B, +_A|_B, \times_A|_B)$

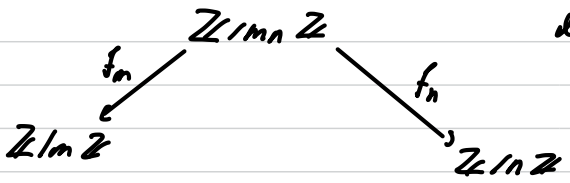
Prp: Soient $(A, +_A, \times_A)$, $(B, +_B, \times_B)$ deux anneaux commut. Tout morphisme des anneaux $f: A \to B$ est un morphisme entre les groupes des inversibles de ces anneaux : $f: A^\times \to B^\times$

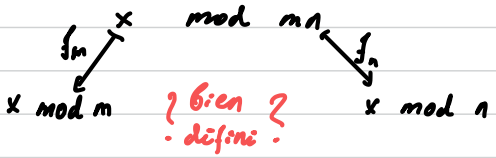
poly p32 prp 32.4

Thm *?: Si $m \wedge n = 1$ alors $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont isomorphes

+ motivation poly pg 94 — p 96, thm 33.5 — deux morphismes

pr:





$x = x' + k\,mn$

$x = x'$ dans $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$

$x \bmod m$ ↘ $x' \bmod m$

$x - x' = k\,mn$

$= (kn)\,m$

$x - x' \equiv 0 \bmod m$

CCL: L'image de x mod mn dans $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ ne dépend de x, x', x'' : choisi

f_m et f_n bien définies

Aff°: f_m est un morphisme d'anneaux

pr: $a + mn\,k$, $b + mn\,l$ ⇝ $a + mnk + b + mnl \bmod m$

autres représentants $a + mnk'$, $b + mnl'$ ⇝ $a + mnk' + b + mnl' \bmod m$

Donc on a bien $f_m(\bar{a} + \bar{b}) = f_m(\bar{a}) + f_m(\bar{b})$

($+$ dans $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$; $+$ addition dans $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$)

De même, on vérifie que $f_m(\bar{a} \times \bar{b}) = f_m(\bar{a}) \times f_m(\bar{b})$

($\times$ dans $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$; $\times$ dans $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$)

Enfin, $f_m(\bar{0}) = \bar{0}$, $f_m(\bar{1}) = \bar{1}$

Thm *?: Si $m \wedge n = 1$ alors $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont isomorphes

$m = n = 1$ pas isomorphisme

$f : \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

$x \bmod mn \longmapsto (x \bmod m,\ x \bmod n)$

$x \longmapsto (f_m(x), f_n(x))$ sont des morphismes

f est un isomorphisme OK

isomorphismes = bijection morphismes vu

Coefficients égaux à gauche et à droite $= mn$

Rappel: $E \xrightarrow{f} F$ avec $|E| = |F| < +\infty$

On montre que f injective

f bijection $\Leftrightarrow$ f injection

Il suffit ici de mq f injective

Soient $x, x' \in \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$ avec:

$f(x) = f(x')$ But: mq $x = x'$

f morphisme $\Downarrow$

$f(x - x') = f(x) - f(x') = 0_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$

$x - x' = y$

$y \in \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$ $\Updownarrow$ $f(y) = (0,0)$ dans le produit

$(y \bmod m,\ y \bmod n) = (0,0)$

y est mult de m et y est mult de n $\Rightarrow$ donc y mult de mn

$y = mk = nl$ (m div mais $mn = 1$ donc $m \mid l$ donc $l = ml'$)

$y = kml' \equiv 0 \bmod mn$

$y \equiv \bar{0}$ dans $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$

càd $x = x'$ ——— □

Thm: En restriction aux gpes des inversibles

$$(\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z})^\times \xrightarrow[f]{\sim} (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$$

Bijection

est un isomorphisme de groupes pour la multiplication

a avec $\exists a', aa' = 1$; b avec $\exists b', bb' = 1$ $\Rightarrow$ ab a l'inverse a'b'

Rappel: Indicatrice d'Euler $\varphi(n) := \text{Card}\{1 \le a \le n : a \wedge n = 1\}$
$= \text{Card}\{1 \le a \le n, \exists n, an = 1\}$
$= \text{Card}\,(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$

Cor: $|(\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z})^\times| = |(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times| \cdot |(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times|$
$\varphi(mn) = \varphi(m) \cdot \varphi(n)$ quand $m \wedge n = 1$

Thm: Si $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$ décp en nbres premiers d'un $n \in \mathbb{N}$, ≥ 2 alors $\varphi(n) = (p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1 - 1}) \cdots (p_r^{\alpha_r} - p_r^{\alpha_r - 1})$

Pv: $\varphi(n) = \varphi(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}) = \varphi(p_1^{\alpha_1}) \cdot \varphi(p_2^{\alpha_2}) \cdots \varphi(p_r^{\alpha_r})$

car deux nbres premiers $\neq$ sont tjrs premiers entre eux

Lm: $\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1}$ où $p \in \mathcal{P}$ $\alpha \ge 1$

Pv: $\varphi(p^\alpha) = \text{Card}\{1 \le k \le p^\alpha : k \wedge p^\alpha = 1\}$ On regarde le complémentaire
$F := \{1 \le l \le p^\alpha : l \text{ et } p^\alpha \text{ pas premiers entre eux}\}$
$\Leftrightarrow \{l = pl' \text{ avec } l \in \mathbb{N} \text{ et } 1 \le l' \le p^{\alpha-1}, l' \text{ qlcq}$
donc il y a $p^{\alpha-1}$ entiers l non premiers avec p^α
donc il y'en a $p^\alpha - p^{\alpha-1}$ qui sont premiers avec p^α □

$\varphi(p^\alpha) = \text{Card}\{1 \le k \le p^\alpha : k \wedge p^\alpha = 1\}$
$= p^\alpha - \text{Card}\{1 \le k \le p^\alpha : k \wedge p^\alpha > 1\}$

tous nombres de 1 à p^α — nombres pas premiers avec p^α

$\text{Card}\{1 \le k \le p^\alpha : k \wedge p^\alpha > 1\} = \text{Card}\{1 \le k \le p^\alpha : \exists l \text{ tq } k = pl\}$
$= \text{Card}\{1 \le pl \le p^\alpha\}$
$= \text{Card}\{1 \le l \le p^{\alpha-1}\}$ (divisé par p)
$= p^{\alpha-1}$

Donc $\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1}$

pgg poly

Obs: Thm Fermat: $\forall a \wedge p,\ p \in \mathcal{P}$ $\quad a^{p-1} \equiv 1 \mod p$

$a^{p-1} = \bar{1}$ dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ corps

$a\,a^{p-2} = 1$

a^{p-2} l'inverse de a

Thm Euler*: Pour $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\forall a \in \mathbb{Z}$ avec $a \wedge n = 1$, on a $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \mod n$

OBS: $\varphi(p^1) = p^1 - p^0 = p-1$

$= \{1 \leq k \leq p : k \wedge p = 1\} = \{1, 2, \dots, p-1\}$

pv: HYP $a \wedge n = 1$ **Aff°:** L'appl $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \longrightarrow (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ est une Bij°

$x \longmapsto ax = y$

$a^{-1}y \longleftarrow y$ d'inverse □

Csqce: $\{x \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times\} = \{ax : x \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times\}$

Produits: $\prod_{x \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times} x = \prod_{x \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times} ax$

$= a^{\varphi(n)} \prod_{x \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times} x$

$1 = a^{\varphi(n)}$

□

$\varphi(n)$ termes dans ces produits

a est une constante

On a définie les anneaux et grps (commutatives)
puis morphismes et isomorphismes
(morpisme bijectives)
puis on définit le produit des anneaux
pour le produits on montre que les inversibles de produit = le produit des inversibles, i.e $(A\times B)^\times = A^\times \times B^\times$
De plus on montre que morphisme entre anneaux $A \to B$ est aussi morphisme entre $A^\times \longrightarrow B^\times$
On introduit déjà $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $\text{Card}(\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}) = m\cdot n$ $\text{Card}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) = m$, $\text{Card}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$
$= \text{Card}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})\cdot\text{Card}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$. De plus $|A\times B| = |A|\cdot|B|$
Puis on montre que morphisme $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
card = Card
est isomorphe si $m\wedge n = 1$

$(\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z})^\times \longrightarrow (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$
est aussi isomorpisme

Or $\varphi(n) = \text{Card}((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times)$
et $|(\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z})^\times| = |(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times|\cdot|(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times|$
donc $\varphi(mn) = \varphi(m)\cdot\varphi(n)$

Par tout ce qu'on a fait avant on peut déduire que:
décomposition en nbres EP
$\varphi(n) = \varphi(p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_r^{\alpha_r}) = \varphi(p_1^{\alpha_1})\cdot\varphi(p_2^{\alpha_2})\cdot\ldots\cdot\varphi(p_r^{\alpha_r})$
$= (p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1-1})\cdot\ldots\cdot(p_r^{\alpha_r} - p_r^{\alpha_r-1})$
Puis on démontre
$\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1}$