



Thm: Soit  $P(n)$  une pte, avec  $n \in \mathbb{N}$

$$\left. \begin{array}{l} (1) P(0) \text{ vraie} \\ (2) P(n) \Rightarrow P(n+1) \end{array} \right] \Rightarrow P(n) \text{ vraie } \forall n \in \mathbb{N}$$

Thm: Soit  $E \subset \mathbb{N}$  ss-ensemble, avec  $E \neq \emptyset$

$$\text{Alors, } \exists m_* \in E \text{ tq } m_* \leq n \quad \forall n \in E$$

Thm:

$$\text{Alors, } \exists r_* \in \text{tq } n \leq r_* \quad \forall n \in E$$

$$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

$$\mathbb{Z} = -\mathbb{N}^* \cup \mathbb{N} = \{-k : k \in \mathbb{N}^*\} \cup \{k : k \in \mathbb{N}\}$$

Déf: Val abs  $n \in \mathbb{Z}$

$$|-n| := n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$|n| = n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Thm: Muni de la loi  $+$ , l'ensemble  $\mathbb{Z} = -\mathbb{N}^* \cup \mathbb{N}$  est un groupe commutatif, avec élément neutre  $0$  et l'opposé de  $n$  est  $-n \quad \forall n \in \mathbb{Z}$

Déf: Un groupe commutatif, c'est  $G$  avec  $*$  satisfaisant

$$(1) \text{ Associativité: } x * (y * z) = (x * y) * z \quad \forall x, y, z \in G$$

$*$ :  $G \times G \longrightarrow G$  loi de groupe

$$(2) \text{ Commutativité: } x * y = y * x \quad \forall x, y \in G$$

$$(3) \quad \forall x \in G, \exists x' \in G \text{ t.q. } x * x' = e = x' * x$$

où  $e \in G$  est l'élément neutre càd  $x * e = x = e * x \quad \forall x \in G \quad 0 \in \mathbb{Z}$

Thm: Muni de  $+$ , et de  $\times$  l'ensemble  $\mathbb{Z}$  est un anneau commutatif  
avec  $0$  el<sup>t</sup> neutre pour  $+$   
 $1$  neutre pour  $\times$

Déf: Un anneau commutatif  $A$ , c'est  $(A, +, \times)$  tq

- (1)  $(A, +)$  est un gp commutatif,  $0 \in A$  el<sup>t</sup> neutre
- (2) la mult  $\times$  est distributive par rapport à  $+$ , et commutative

avec  $1_A \in A$  tq  $1 \times a = a = a \times 1 \quad \forall a \in A$

avec  $a \times b = b \times a \quad \forall a, b \in A$

avec  $a \times (b+c) = a \times b + a \times c \quad \forall a, b, c \in A$

avec  $\times$  est associative Ex:  $A = \mathbb{Z}$

Prp<sup>\*7</sup>: Soient  $m, n, a, b, c, d \in \mathbb{Z}$

(1)  $(m \geq 0 \text{ et } n \geq 0) \Rightarrow m+n \geq 0 \text{ et } m \cdot n \geq 0$

(2)  $\overbrace{a \leq x \leq b}^{\text{red}} \Rightarrow -b \leq -x \leq -a$

(3)  $\overbrace{a \leq x \leq b}^{\text{red}} \text{ et } c \leq y \leq d \Rightarrow a+c \leq x+y \leq b+d$

(4)  $a \leq b \Rightarrow a+c \leq b+c \quad \forall c \in \mathbb{Z}$

(5)  $0 \leq a \leq b \text{ et } 0 \leq c \Rightarrow ac \leq bc$

(6)  $0 \leq a \leq b \text{ et } c \leq 0 \Rightarrow bc \leq ac \leq 0$

(7)  $a \in \mathbb{Z} \text{ avec } a \neq 0 \Rightarrow |a| \geq 1$   
 $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

Thm: (1) Soit  $E \subset \mathbb{Z}$  non vide  $E \neq \emptyset$   
fini  $\text{Card } E < \infty$ ,  $|E| < \infty$

Alors  $\exists m_* \in E$ ,  $\exists z_* \in E$  tq  
 $\min_{x \in E} m_* \leq n \leq \max_{x \in E} z_*$   $\forall n \in E$

(2) Soit  $E \subset \mathbb{Z}$  non vide,  $E \neq \emptyset$ , minoré, c.à.d.  
 $\exists j \in \mathbb{Z}$  tq  
 $j \leq n \quad \forall n \in E$

Alors,  $\exists m_* \in E$  plus petit el<sup>t</sup>:  $j \leq n \quad \forall n \in E$   
 $m_* \leq n \quad \forall n \in E$

(3) Soit  $E \subset \mathbb{Z}$ ,  $E \neq \emptyset$  <sup>majoré</sup> tq  $\exists k \in \mathbb{Z}$  majorant, c.à.d.  
 $\forall n \in E \quad n \leq k$

Alors  $\exists z_* \in E$  el<sup>t</sup> max c.à.d.  
 $n \leq z_* \quad \forall n \in E$