



TD 4 ex 5

TD 3 ex 18, 17

Bonus

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tq $0 < \alpha < \beta$ et $\alpha, \beta \neq 1$

Posons $S_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \beta n \rfloor} \frac{n^k}{k!}$

A.t.o.n $S_n \sim e^n$ ou $S_n = o(e^n)$ ou autre
quand $n \rightarrow \infty$:

Exercice 5

1) $X \sim \mathcal{B}(n, 0.8)$

2) $P(X > 200) < 0.05$

$$E[X] = 0.8n$$

$$\forall \varepsilon > 0, P(|X - 0.8n| > \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

$$= P(X < 0.8n - \varepsilon) \vee (X > 0.8n + \varepsilon)$$

Conséquence: $P(X > 0.8n + \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2} = \frac{n \cdot 0.8 \cdot 0.2}{(200 - 0.8n)^2} \leq 0.05$
On choisit n tq
On prend $\varepsilon = 200 - 0.8n$ ceci soit vrai

Thm: Markov Si X v.a. positive, alors:

$$\forall \alpha > 0, P(X > \alpha) \leq \frac{E[X]}{\alpha}$$

Triviale si: $\alpha < E[X]$

Sci: $P(X > 200) \leq \frac{E[X]}{200} = \frac{0.8n}{200}$
On veut n tq $\frac{0.8n}{200} \leq 0.05$ i.e $n \leq \frac{200 \cdot 0.05}{0.8} = \frac{10}{0.8} = 12.5$
On prend $n = 12$

TD 3

$$\frac{n \cdot 0,8 \cdot 0,2}{(200 - 0,8n)^2} \leq 0,05$$

$$n < \frac{200}{0,8} = 250$$

Exercice 18.

1,6

$$P(X=1) = \binom{4}{2} 0,42^2 0,58^2$$

$$P(X=2) = \frac{4!}{2! 2!} = \frac{24}{2} = 8 \cdot 0,05 = 0,42$$

$$P(X=1) = 4 \approx 0,32$$

$$P(X=0) =$$

Exercice 17

$$P(X=6) = (0,7)^6 \cdot 0,3$$

$P(X$

$$E[X] = \frac{1}{0,3} = \frac{10}{3} = 3,3333 \dots$$

$$P(X \geq 6) = 1 - P(X < 6) = 1 - 0,88 = \underline{\underline{0,12}}$$

Méthode 1:

$$P(X=0) = 0,3$$

$$P(X=1) = 0,7 \cdot 0,3$$

$$P(X=2) = 0,7^2 \cdot 0,3$$

$$P(X=3) = 0,7^3 \cdot 0,3$$

$$P(X=4) = 0,7^4 \cdot 0,3$$

$$P(X=5) = 0,7^5 \cdot 0,3$$

$$= 1 - \sum_{k=1}^6 (1-p)^{k-1} p$$

$$= 1 - p \sum_{k=1}^6 (1-p)^{k-1}$$

$$= 1 - p \cdot \frac{1 - (1-p)^6}{1 - (1-p)}$$

Méthode 2: L'événement $[Y \geq 7]$ signifie que les 6 premières exp. de Bernouilli ont été échec, comme elles sont indépendantes, $P(Y \geq 7) = (1-p)^6$

TD 9:

Exc 10 Notons T le nombre de personnes guéries parmi les 12

Sous H_0 : $T \rightsquigarrow \mathcal{B}(12, \frac{1}{2})$

Sous H_1 : T a tendance à être plus grande que sous H_0

Zone de rejet de la forme

Variante: H_1 : " $p = \frac{3}{4}$ ou $p = \frac{1}{4}$ " [le médicament est efficace ou bien non]

Sous H_0 : $T \rightsquigarrow \mathcal{B}(12, \frac{1}{2})$

Sous H_1 : T va être plus petite ou plus grande, en tout cas + loin de 6.

rejet $R =]0, 6 - c] \cup]6 + c, 12]$ (symétrique)

Choix de δ pour avoir niveau 5%

$$P(T \in R | H_0) = P(T_0 \geq \delta)$$

en notant T_0 une v.a qui suit $\mathcal{B}(12, \frac{1}{2})$

$$P(T_0 \geq \delta) = 1 - P(T_0 < \delta) = 1 - P(T_0 \leq \delta - 1) \text{ car } T_0(12) \in \mathbb{Z}$$

On veut: $P(T_0 \geq \delta) \leq 0,05$, ce qui équivaut à $P(T_0 \leq \delta - 1) \geq 0,95$

On lit dans la table que c'est le cas si $\delta - 1 = 9$ i.e $\delta = 10$
(c'est faux pour $\delta < 10$)

Puissance du test: probabilité, sachant que H_0 fautive, de la rejeter
 $\hookrightarrow$ on veut qu'elle soit grande
 $\hookrightarrow = 1 - \text{probas de l'erreur de 2}^{\text{ème}} \text{ espèce}$
 $\hookrightarrow$ ne pas rejeter H_0 alors que H_0 est fautive.

2) Puissance: $P(T \in R | H_1) = P(T, \geq 10)$ où $T, \rightsquigarrow \mathcal{D}(12, 94)$
 $= 1 - P(T, \leq 9)$
 $= 1 - 0,609$
 $= 0,391$ (probas qu'on sait que c'est efficace quand c'est efficace)

La puissance du test est 0,391. Si le médicament est efficace, on a (seulement) 39,1% de chance de s'en apercevoir à l'issue du test. = du rejeter H_0

3) $T = 9 \notin [10, 12]$ on ne rejette pas H_0

4)

Bonus

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tq $0 < \alpha < \beta$ et $\alpha, \beta \neq 1$

$$\text{Posons } S_n = \sum_{k=\lfloor \alpha n \rfloor}^{\lfloor \beta n \rfloor} \frac{n^k}{k!} = \sum_{\alpha n \leq k \leq \beta n} \frac{n^k}{k!}$$

A-t-on $S_n \sim e^n$ ou $S_n = o(e^n)$ ou autre
quand $n \rightarrow \infty$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k}{k!} = e^n$$

$$k=n \cdot \frac{n^n}{n!} \sim \frac{e^n}{\sqrt{2\pi n}}$$

valeurs importantes
 $k \in [1, \dots, \sqrt{n}, n+1, \dots, \sqrt{n}]$

$$k = \frac{n}{2} \quad \frac{n^{n/2}}{(n/2)!} \sim \frac{n^{n/2}}{(n/2)^{n/2} e^{-n/2} \sqrt{2\pi n/2}} = \left(\frac{2}{e}\right)^{n/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

$$\text{Thm: } \begin{cases} S_n \sim e^n & \text{si } 1 \in [\alpha, \beta] \text{ (i.e. } \alpha < 1 < \beta) \\ S_n = o(e^n) & \text{si } 1 \notin [\alpha, \beta] \text{ (i.e. } 1 < \alpha < \beta \text{ ou } \alpha < \beta < 1) \end{cases}$$

pr:

où $X_n \sim P(n)$

$$e^{-n} S_n = \sum_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ \alpha n \leq k \leq \beta n}} \frac{e^{-n} n^k}{k!}$$

$$= \sum_{\alpha n \leq k \leq \beta n} P(X_n = k) = P(\alpha n \leq X_n \leq \beta n) = P(\alpha \leq \frac{X_n}{n} \leq \beta)$$

Pour conclure il suffit de démontrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\alpha \leq \frac{X_n}{n} \leq \beta) = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha < 1 < \beta \\ 0 & \text{si } \beta < 1 \text{ ou } 1 < \alpha \end{cases}$$

Soient $T_1, T_2, \dots, T_n$ des v.a. indép. de même loi $P(1)$. Alors $T_1 + \dots + T_n$ a la même loi que X_n donc
 $P(\alpha \leq \frac{X_n}{n} \leq \beta) = P(\alpha \leq \frac{T_1 + \dots + T_n}{n} \leq \beta)$

$\otimes$ Si $\beta < 1$: $0 \leq P(X \leq \frac{T_1 + \dots + T_n}{n} \leq \beta)$
 $\leq P(\frac{T_1 + \dots + T_n}{n} \leq 1 - \varepsilon)$ avec $\varepsilon = 1 - \beta > 0$
 $\leq P(|\frac{T_1 + \dots + T_n}{n} - 1| \geq \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$
 par la loi des grands nombres

$$e^{-n} \sum_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ n - 4\sqrt{n} \leq k \leq n + 5\sqrt{n}}} \frac{n^k}{k!} = \sum_{n - 4\sqrt{n} \leq k \leq n + 5\sqrt{n}} P(X_n = k) = P(1 - \frac{4}{\sqrt{n}} \leq \frac{X_n}{n} \leq 1 + \frac{5}{\sqrt{n}})$$

$$- P(-\varepsilon \leq \sqrt{n}(\frac{X_n}{n} - 1) \leq \varepsilon)$$

Thm centrale limite:

$$P(-\varepsilon \leq \sqrt{n}(\frac{X_n}{n} - 1) \leq \varepsilon) \longrightarrow \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}$$