



B-T: Si $V(X)$ existe $\Leftrightarrow X^2$ est intégrable $\Leftrightarrow E[X^2] < \infty$

$$\forall \varepsilon > 0, P(|X - E[X]| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

$$\varepsilon = c \sigma(X)$$

$$P(|X - E[X]| \geq c \sigma(X)) \leq \frac{1}{c^2}$$

$$c = 3 \Rightarrow \text{probas} \leq \frac{1}{9} \approx 11\%$$

$X_1, \dots, X_n$ v.a. indép. de $\vec{n}$ loi

$$S_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \quad E[S_n] = E[X_1]$$

$$V(S_n) = \frac{1}{n^2} V(X_1 + \dots + X_n) = \frac{V(X_1)}{n}$$

B-T à S_n Version quantitative de

$$P(|S_n - E[X_1]| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X_1)}{n \varepsilon^2}$$

Corollaire: Loi faible des grands nombres

$$\forall \varepsilon > 0, P(|S_n - E[X_1]| \geq \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$P(|S_n - E[X_1]| < \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

Exercice 1

Notons n le nombre de lancers.

Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, notons X_i v.a. qui vaut 1 si i ème lancer donne 1 et qui vaut 0 sinon.

Alors $X_i \sim \mathcal{B}(\frac{1}{6})$

Les $X_1, \dots, X_n$ sont indép. et de m. loi.

Posons $S_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$ qui est la fréquence d'obtention de la face 1.

Version quantitative de la loi des grands nombres (car $V(X_i)$ existe):

$$P(|S_n - E[X_i]| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X_i)}{n\varepsilon^2}$$

$$\text{Or } X_i \sim \mathcal{B}(\frac{1}{6}) \quad E[X_i] = \frac{1}{6} \\ V(X_i) = \frac{1}{6}(1 - \frac{1}{6}) = \frac{5}{36}$$

On prend $\varepsilon = \frac{1}{100}$ Alors: $[|S_n - E[X_i]| \geq \varepsilon] =$ "la fréquence d'apparition de 1 diffère de $\frac{1}{6}$ de plus de $\frac{1}{100}$ "

$$\text{On veut } \frac{V(X_i)}{n\varepsilon^2} \leq 0,05 \quad (\Leftrightarrow) \quad n \geq \frac{20 V(X_i)}{\varepsilon^2}$$

$$\Leftrightarrow n \geq 20 \cdot \frac{5}{36} \cdot 10^4 = \frac{10^6}{36} \simeq 3 \cdot 10^4$$

$$\text{Si } n \geq 3 \cdot 10^4 \text{ alors } P(|S_n - \frac{1}{6}| \geq \frac{1}{100}) \leq \frac{V(X_i)}{n\varepsilon^2} \leq 0,05$$

Exercice 2:

X_i numéro tiré au i ème tirage $1 \leq i \leq n$

tirages avec remise N boules dans l'urne (N inconnu)

$$\underline{1)} \quad X_i \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, N \rrbracket)$$

$$\underline{2)} \quad \hat{N}_n^{(\max)} = \max(X_1, \dots, X_n). \quad \text{On a } \hat{N}_n^{(\max)}(\mathbb{Z}) = \llbracket 1, N \rrbracket$$

CDF

Soit $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$ la fonction de répartition de $\hat{N}_n^{(\max)}$ est

$$F: k \longmapsto F(k) = P(\hat{N}_n^{(\max)} \leq k) = \sum_{\ell=1}^k P(\hat{N}_n^{(\max)} = \ell)$$

Yci: $F(k) = P(\max(X_1, \dots, X_n) \leq k) = P(X_1 \leq k \text{ et } \dots \text{ et } X_n \leq k)$

$$= \prod_{i=1}^n P(X_i \leq k) \quad \text{car } X_1, \dots, X_n \text{ indépendantes}$$

$$= \prod_{i=1}^n \frac{k}{N} \quad \text{car } X_i \sim \mathcal{U}([1, N])$$

$$= \left(\frac{k}{N}\right)^n$$

3] On déduit de 2] la loi de $\hat{N}_n^{\max}$:

$$P(\hat{N}_n^{\max} = k) = F(k) - F(k-1)$$

$$= \left(\frac{k}{N}\right)^n - \left(\frac{k-1}{N}\right)^n = \frac{k^n - (k-1)^n}{N^n} \quad \forall k \in [1, N]$$

D'où $P(\hat{N}_n^{\max} = N) = 1 - \left(\frac{N-1}{N}\right)^n \approx 1 - e^{-n}$

$$P(\hat{N}_n^{\max} = N) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \quad \text{car } 0 \leq \frac{N-1}{N} \leq 1$$

NB: Si $n = \alpha N$ avec $\alpha > 0$ fixe,

$$\left(\frac{N-1}{N}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{\alpha N} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} e^{-\alpha}$$

Il y a un paramètre inconnu qu'on cherche à estimer: ici N

Obs: v.a.s $X_1, \dots, X_n$ dont on mesure des réalisations

Point crucial: $X_1, \dots, X_n$ suivent des lois connues
mais dont un paramètre est inconnu

Yci $X_1, \dots, X_n \sim \mathcal{U}([1, N])$

Estimateur: v.a. qui est exprimée en fonction de $X_1, \dots, X_n$
mais pas de N

Ex: $\hat{N}_n^{\max}$ est un estimateur

Déf: un estimateur sans biais de N est un estimateur T tq
 $E[T] = N$

Ex Il s'agit de montrer que $E[\hat{N}_n^{\max}] \neq N$

$$E[\hat{N}_n^{\max}] = \sum_{k=1}^N \underbrace{k}_{\leq N} P(\hat{N}_n^{\max} = k) \leq N \sum_{k=1}^N P(\hat{N}_n^{\max} = k) = N'$$

↓
ici l'ing est stricte si $N \geq 2$
car pour $k=1$ $1 \cdot P(1) < N P(1)$

$$\text{car } P(\hat{N}_n^{\max} = 1) > 0$$