

Feuille 3

Variables aléatoires discrètes

Exercice 1. *Les journaux*

Un buraliste de la Gare du Nord propose N revues différentes, mais se retrouve souvent avec des invendus sur les bras. Il remarque un jour que chaque client, inévitablement pressé et distrait, achète en fait sa revue au hasard. Ce qui arrange bien ses affaires, puisqu'il va maintenant pouvoir faire des prévisions.

On se focalise sur la revue i_0 une bonne fois pour toutes.

On note X_{n,i_0} le nombre de personnes ayant acheté la revue i_0 parmi les n premiers acheteurs.

1. Décrire un espace de probabilité (Ω, P) associé à cette expérience aléatoire. Quelle est la loi de X_{n,i_0} ?
2. Vers quelle loi converge la loi de X_{n,i_0} quand n et N tendent vers l'infini et que le rapport n/N converge vers α , un réel strictement positif ?

Exercice 2. *Extrait de l'examen 2018*

Un dentiste réfléchit à son budget lié à la pose de couronnes. Chaque couronne posée coûte 500 euros au dentiste, et lui rapporte 600 euros (les honoraires payés par le patient). Rarement (une fois sur 100), il y a un problème nécessitant de tout refaire, ce qui coûte donc à nouveau 500 euros au dentiste (qui ne refait pas payer son patient, ce dernier n'étant pas responsable). En un an, le dentiste pose 200 couronnes (sans compter celles qu'il doit refaire en cas de problème). Dans tout l'exercice, on supposera qu'il n'est jamais nécessaire de poser une troisième fois une couronne pour une même dent (le problème ne se pose jamais deux fois de suite).

1. On note X le nombre de couronnes qui sont à refaire en un an. Quelle est la loi de X ?
2. Exprimer ce que gagne le dentiste en un an (pour ces 200 couronnes posées) en fonction de X , puis calculer son espérance.
3. Par quelle loi peut-on approcher la loi de X ? Énoncer un résultat mathématique précis correspondant à cette approximation.
4. Calculer la probabilité pour le dentiste de gagner strictement moins de 18 000 euros grâce aux 200 couronnes qu'il a posées en un an. On utilisera pour cela l'approximation proposée à la question précédente, et l'on donnera une valeur décimale de cette probabilité. Le dentiste peut-il raisonnablement faire son budget en supposant qu'il gagnera au moins 18 000 euros par an avec ses poses de couronnes ?

Exercice 3. *La réception*

Un ambassadeur a envoyé des invitations pour une réception à n Bordures et n Syldaves. Mais chaque invitation a une chance sur deux d'être interceptée par une puissance étrangère...

1. Quelle est la probabilité d'accueillir autant de Bordures que de Syldaves et d'éviter ainsi une crise diplomatique ? (On suppose que chaque personne qui a reçu une invitation se rend à la fête).
2. Et quelle est la probabilité d'accueillir plus de Bordures que de Syldaves ?

Indication : Si X et Y sont deux lois binomiales indépendantes de mêmes paramètres n et $1/2$, on pourra calculer $P(X = Y)$ en montrant que $\sum_{k=0}^n (C_n^k)^2 = C_{2n}^n$. Montrer aussi que $P(X > Y) = P(Y > X)$ et en déduire la valeur de $P(X > Y)$.

Exercice 4. *Jury d'assises (extrait de l'examen 2019)*

Un jury d'assises est constitué par tirage au sort de 6 personnes parmi les N inscrits sur la liste électorale d'une commune. On sait qu'un quart des personnes inscrites sur cette liste électorale sont des retraités (on supposera N divisible par 4). On s'intéresse au nombre X de retraités tirés au sort pour faire partie du jury.

1. Quelle est la loi de X ?
2. Que vaut l'espérance de X ?
3. Par combien peut-on majorer la variance de X ?
4. Dans le cas d'une commune ne comprenant que $N = 20$ électeurs, donner la valeur de $P(X = 5)$.
5. Pour une commune très peuplée (par exemple, Paris), donner une valeur approchée de $P(X = 5)$. Préciser le résultat mathématique qui justifie cette approximation. Comparer au résultat de la question précédente : est-ce surprenant ?

Exercice 5. *Un espion dans le potager*

L'entreprise Milvorin, « producteur de graines depuis 1742 », s'intéresse à la reproduction du cerfeuil tubéreux (*chaerophyllum bulbosum*). Elle envoie donc des espions chez un concurrent, et ceux-ci observent que :

- le nombre X de « légumes-descendants » issus de la reproduction d'un même « légume-parent » suit une loi uniforme sur $\{0, \dots, N - 1\}$ (N étant inconnu),
- chaque descendant a 20% de risques d'être stérile.

L'entreprise souhaite connaître le nombre moyen de descendants stériles.

1. Combien le cerfeuil tubéreux a-t-il de descendants en moyenne ?
2. On note Y le nombre de descendants stériles.
 - (a) X et Y sont-elles indépendantes ?
 - (b) Pour $(n, i) \in \{0, \dots, N - 1\}^2$, calculer $P(Y = i | X = n)$.
 - (c) En déduire $P(Y = i \text{ et } X = n)$ puis exprimer $P(Y = i)$ sous forme d'une somme.
 - (d) Calculer $E(Y)$. Est-ce surprenant ?

Exercice 6.

1. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme à valeur dans l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$ et V une variable aléatoire telle que, conditionnellement à U , V suit une loi de Bernoulli de paramètre U/n . Explicitement, on a $P(V = 1|U = k) = k/n$ et $P(V = 0|U = k) = 1 - k/n$. Donner la loi et l'espérance de V .
2. Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$. Soit Y une variable aléatoire de loi uniforme sur $\{1, \dots, X\}$. Donner un sens mathématique à la phrase précédente ; donner la loi de Y , et calculer l'espérance de Y en fonction de n .
3. Soit X une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre λ . Soit Y une variable aléatoire telle que, conditionnellement à X , Y suit une loi binomiale de paramètres X et p . Après avoir donné un sens mathématique à la phrase précédente, montrer que Y est une loi de Poisson de paramètre λp .

Exercice 7. *Le saucisson*

Auguste et Ernest pique-niquent à Fontainebleau. Ils n'ont plus qu'un seul billet de train pour rentrer à Paris, et décident de le jouer à pile ou face. Comme ils n'ont pas de pièce de monnaie (sans quoi ils achèteraient un second billet !), ils utilisent une rondelle de saucisson que Ernest, peu délicat, coupe très épaisse : la probabilité que la rondelle tombe sur la tranche est non nulle. À chaque lancer, on a donc une probabilité p de faire pile, p de faire face (la même, car la rondelle est symétrique) et $1 - 2p$ de faire « tranche ».

Pris par le jeu, Ernest et Auguste effectuent n lancers successifs, $n > 0$. On note X la variable aléatoire donnant le nombre de fois qu'ils obtiennent pile, et Y le nombre de fois qu'ils obtiennent face.

1. Donner la loi de (X, Y) .
2. Calculer $P(X = Y)$ sous forme d'une somme, étudier ses cas limites ($p = 0$ et $p = 1/2$), puis trouver dans le cas général un encadrement de cette somme. *Indication : on pourra d'abord calculer astucieusement $\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} (2p)^{2k} (1 - 2p)^{n-2k}$.*

Exercice 8. *Le jeu du pile ou face*

Un passant est interpellé dans la rue. On lui propose un jeu « exceptionnel » où il peut « faire fortune ». On joue n fois à pile ou face avec une pièce. On gagne un euro à chaque pile et on perd un euro à chaque face.

À la manche k , on empoche (ou débourse) le gain X_k . Les X_k sont toutes indépendantes, et le gain total est $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

Le lecteur, qui flaire une escroquerie, notera $P(X_k = 1) = p$ et $P(X_k = -1) = 1 - p$, avec sans doute $p \neq \frac{1}{2}$...

1. Pour commencer, montrer que si U et V sont deux variables indépendantes, alors $E(UV) = E(U)E(V)$ et que $\text{Var}(U + V) = \text{Var}(U) + \text{Var}(V)$.
2. Donner alors $E(X_k)$, $\text{Var}(X_k)$, $E(S_n)$ et $\text{Var}(S_n)$.
3. Montrer que si $p = \frac{1}{2}$, alors $P(|S_n| \geq 5\sqrt{n}) \leq 4\%$.
4. Le passant, naïf mais obstiné, lance 10000 fois la pièce... et perd plus de 500 euros ! La pièce vous paraît-elle équilibrée ?
5. Donner la loi de S_n . Pour cela, préciser un espace de probabilité associé à l'expérience. Noter alors T_n le nombre de piles et exprimer S_n en fonction de T_n .

6. Soit $a > 0$. Montrer que $P(|S_n| < a) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$. À cet effet, on rappelle la formule de Stirling : $n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 9. L'examen

On réalise un QCM à l'aide de 20 questions indépendantes :

- Chaque question propose 4 réponses dont une seule est valable.
- Une réponse juste rapporte 3 points et une fausse pénalise de 1 point. La note finale est la somme des points obtenus divisée par 3.

On note c le coefficient de connaissance du candidat, c'est-à-dire qu'à une question donnée, la réponse est connue du candidat avec une probabilité égale à c . Lorsque le candidat connaît une réponse, il coche la réponse juste. Il peut par contre adopter deux stratégies pour les questions dont il ignore la réponse :

- **Stratégie 1** : ne pas répondre (et gagner 0 points).
- **Stratégie 2** : cocher au hasard.

On cherche à déterminer la meilleure stratégie à suivre.

1. Dans cette question, on suppose (stratégie 1) qu'il n'a répondu qu'aux questions qu'il connaissait. Soit X_1 la variable aléatoire donnant le nombre de réponses justes. Quelle est la loi de X_1 (en fonction de c) ? Quelle est son espérance ?
2. On suppose maintenant (stratégie 2) que le candidat a répondu à toutes les questions. Soit X_2 la variable aléatoire donnant le nombre de réponses justes. Quelle est la loi de X_2 ? Quelle est son espérance ? Y a-t-il une relation entre X_1 et X_2 ? si oui précisez laquelle.
3. Soient N_1 et N_2 les notes obtenues avec chacune des deux stratégies. Exprimer N_1 et N_2 à l'aide de X_1 et X_2 . En déduire en fonction de c les espérances de N_1 et N_2 . Que remarque-t-on ?
4. Calculer pour chaque stratégie la probabilité qu'un candidat de coefficient de connaissance $c = 0.5$ ait la moyenne à cette épreuve.

S'il obtient entre 8 et 10, le candidat peut passer l'oral de rattrapage, s'il a en dessous de 8, il est ajourné.

Pour chacune des stratégies, déterminer la probabilité d'être ajourné à l'aide du tableau ci-dessous. À la place du candidat, que choisiriez-vous comme stratégie finalement ? À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, donner pour chacune des stratégies une borne sur la probabilité d'être ajourné.

Tableau des valeurs de $k \rightarrow F_{X_1}(k) = \mathbb{P}(X_1 \leq k)$ et $k \rightarrow F_{X_2}(k) = \mathbb{P}(X_2 \leq k)$ pour $c = 0.5$.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$F_{X_1}(k)$	10^{-6}	$2 \cdot 10^{-5}$	0.0002	0.001	0.006	0.021	0.058	0.132	0.252	0.412
$F_{X_2}(k)$	$3 \cdot 10^{-9}$	10^{-7}	$2 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 10^{-5}$	0.0001	0.001	0.003	0.012	0.034	0.085

k	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$F_{X_1}(k)$	0.588	0.748	0.868	0.942	0.979	0.994	0.999	0.9998	0.99998	0.99999
$F_{X_2}(k)$	0.177	0.317	0.492	0.672	0.821	0.921	0.973	0.993	0.999	0.9999

Exercice 10. *La mercière et sa voisine*

Une mercière possède une boîte à couture séparée en deux compartiments : un premier compartiment C_1 contenant v_1 boutons verts et r_1 boutons rouges, et un second compartiment C_2 contenant v_2 boutons verts et r_2 boutons rouges. Tout en bavardant avec sa fille, elle pioche des boutons au hasard (avec remise). Sa voisine, qui épie par-dessus la haie, remarque la chose suivante :

- Pour le premier tirage, elle a choisi au hasard un des deux compartiments.
- Lorsqu'elle tire un bouton rouge, elle effectue son tirage suivant dans le compartiment C_1 ; lorsqu'elle en tire un vert, elle pioche alors dans le compartiment C_2 .

La voisine, croyant y voir un code secret, sort aussitôt une feuille de papier et entame des calculs.

1. Elle note $B_i = \{ \text{le bouton tiré au } i\text{-ème tirage est rouge} \}$ et décide de chercher la valeur de $p_i = P(B_i)$...
 - (a) Calculer d'abord $P(B_1)$...
 - (b) ... puis $P(B_i|B_{i-1})$...
 - (c) ... pour alors chercher une relation de récurrence de la forme $p_i = ap_{i-1} + b$ (a et b seront explicites). Résoudre cette relation.
2. Soit $X_n = \text{Nombre de boutons rouges tirés jusqu'au } n\text{-ième tirage}$. Que vaut $E[X_n]$? On pourra remarquer que $X_n = \sum_{i=1}^n 1_{B_i}$.

Exercice 11. *La transmission*

On désire transmettre un message binaire (une suite de 0 et de 1) par un canal parasité. On s'intéresse dans cet exercice à la transmission d'un bit.

À chaque transmission d'un bit, une erreur, indépendante du bit émis, a une probabilité égale à 0,05 de se produire et dans ce cas le bit arrivant est inversé (on reçoit 0 si on avait émis 1 et réciproquement). Pour réduire les risques de mauvaises interprétations du message, on répète chaque bit n fois indépendamment. À chaque bit émis, on reçoit donc un mot binaire de n lettres (s'il n'y avait pas de parasitage sur le canal, on recevrait n fois 0 pour le bit 0). Pour décoder, on décide simplement de traduire la suite des n bits reçus par le bit le plus fréquent dans cette suite (on choisit un n impair).

1. Soit X la variable aléatoire comptant le nombre d'erreurs transmises pour un bit émis. Quelle est la loi de X ? Quelle est la probabilité de ne pas se tromper au décodage lorsque $n = 3$?
2. En réalité, le bit 0 est beaucoup plus rare que le bit 1 : il est émis seulement avec une probabilité 1/10000. Modéliser sous ces conditions un espace de probabilité (Ω, P) représentant la transmission d'un bit.
3. On note Y la variable aléatoire égale au nombre de 0 dans le mot reçu. Exprimer Y à l'aide de X et du bit initial. En déduire la loi de Y pour $n = 3$. Que remarquez-vous ?
4. On suppose que $n = 3$. Quelle est la probabilité qu'un mot ne contenant que des 0 provienne quand même du bit 1 ?
5. On voudrait être sûr à 95%, si on reçoit un mot ne contenant que des 0, que la source était bien 0. Combien de fois faut-il répéter le bit pour cela ?

Exercice 12. *Variables aléatoires sur un univers dénombrable*

Pour chacune des variables aléatoires ci-dessous, déterminer si leur espérance est bien définie, et si oui calculer leur valeur. On pourra utiliser les formules

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

1. X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}$, de germe de probabilité p_X défini par

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad p_X(n) = \begin{cases} \frac{1}{n^2} \frac{6}{\pi^2} & \text{si } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. Y une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}$, de germe de probabilité p_Y défini par

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad p_Y(n) = \begin{cases} \frac{1}{n^4} \frac{45}{\pi^4} & \text{si } n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3. Z une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}$, de germe de probabilité p_Z défini par

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad p_Z(n) = \begin{cases} \frac{1}{n^2} \frac{3}{\pi^2} & \text{si } n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 13. *Une variante de pile ou face*

Bruno vous propose de jouer au jeu suivant :

- Au départ, un billet de 5 euros est posé sur la table.
 - Bruno lance une pièce équilibrée. Si le résultat est « pile », vous gagnez la somme posée sur la table, et le jeu s'arrête. Si le résultat est « face », Bruno double la somme posée sur la table et lance à nouveau sa pièce.
 - On continue aussi longtemps que nécessaire.
1. Quelle est la loi du nombre X de lancers de la pièce jusqu'à la fin du jeu ?
 2. Combien gagne-t-on d'argent à ce jeu en moyenne ?
 3. Si Bruno vous demande 1000 euros pour avoir le droit de participer au jeu, seriez-vous d'accord pour y jouer ?

Exercice 14. *Extrait du partiel de 2022*

Pour passer le permis de conduire, il y a deux examinateurs possibles, Christine et Denis. Le taux de réussite quand on passe le permis avec Christine est de 60% et quand on passe le permis avec Denis de 40%. L'attribution des examinateurs aux candidats se fait au hasard.

1. Traduire l'énoncé mathématiquement.
2. Antoine passe son permis, il le rate.
 - (a) Quelle est la probabilité qu'il l'ait passé avec Christine ? Avec Denis ?
 - (b) On dispose d'une information supplémentaire. Pendant qu'Antoine passait (et ratait) le permis, Bérangère le passait aussi, et l'a obtenu. Quelle est la probabilité qu'Antoine l'ait passé avec Christine ?

3. Un candidat se présente pour passer le permis. Soit X la variable aléatoire qui vaut 1 si le candidat réussit et 0 sinon. Quelle est la loi de X ?
4. A la fin de la journée, $2n$ candidats ont passé le permis, la moitié avec Christine, et l'autre moitié avec Denis. La liste des candidats ayant obtenu le permis en ayant eu Christine comme examinatrice contient S noms, et la liste de ceux ayant obtenu le permis en ayant eu Denis comme examinateur contient T noms. Quelle est la loi de S ? Quelle est la loi de T ?
5. On tombe sur une des deux listes, on ne sait pas de quel examinateur elle provient. Cette liste contient k noms de candidats ayant obtenu le permis. Quelle est la probabilité que ce soit la liste de Christine ? Montrer que cette probabilité est supérieure ou égale à $1/2$ si et seulement si $k \geq n/2$.
6. François a décidé de passer le permis, et de retenter sa chance après chaque échec, avec un maximum de 4 tentatives compte tenu du coût que cela induit. On note N la variable aléatoire égale au nombre d'essais qu'aura fait François.
 - (a) Quelle est la loi de N ? Calculer $E(N)$.
 - (b) Sachant que François a fait 4 tentatives, quelle est la probabilité qu'il ait finalement obtenu le permis ?

Exercice 15. *Extrait d'un test de 2023*

Un sac contient six jetons indiscernables au toucher, portant les numéros suivants : 0,0,1,2,2,2. On extrait sans remise deux jetons l'un à la suite de l'autre. On note X le résultat du premier jeton et Y le résultat du deuxième jeton.

1. Quelle est la loi de la variable aléatoire (X, Y) ? Compléter le tableau ci-dessous, en justifiant au moins un des calculs.

	$X = 0$	$X = 1$	$X = 2$
$Y = 0$	2/30	2/30	
$Y = 1$	2/30		3/30
$Y = 2$	6/30	3/30	

Quelle est la loi de la variable aléatoire X ? Quelle est la loi de la variable aléatoire Y ? On pourra présenter les résultats à l'aide du tableau.

2. Calculer les espérances de X et Y .
3. Montrer que $E(XY) = \frac{36}{30}$, puis calculer la covariance de X et Y .
4. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Pour s'exercer

Vous trouverez d'autres variantes des exercices ci-dessous sur WIMS (feuille 4)

Exercice 16. *Événement défini par une variable aléatoire — Moments et variance d'une variable aléatoire*

Le tableau ci-dessous décrit la loi d'une variable aléatoire X qui prend ses valeurs dans l'ensemble des entiers $\{-3, \dots, 1\}$:

i	-3	-2	-1	0	1
$P(X = i)$	3/13	3/13	4/13	1/13	2/13

1. Calculer la probabilité de l'évènement $\{|X| \leq 1\}$.
2. Déterminer l'espérance et la variance de X .

Exercice 17. *Suite aléatoire de lettres*

Une source émet une suite de lettres choisies indépendamment les unes des autres parmi les lettres **a**, **b** et **c** suivant la loi de probabilité décrite par le tableau

Lettre	a	b	c
Probabilité	0.3	0.33	0.37

On note X la variable aléatoire donnant le nombre de lettres émises avant que la lettre **a** apparaisse. Calculer $P(X \geq 6)$ et $E[X]$.

Exercice 18. *Un pari sur un tirage de lettres*

Une source émet une suite de 4 lettres choisies indépendamment les unes des autres parmi les lettres **a**, **b** et **c** suivant la loi de probabilité décrite par le tableau

Lettre	a	b	c
Probabilité	0.2	0.42	0.38

1. Si vous deviez parier sur le nombre de fois où la lettre **b** va être émise par la source, quel serait votre pari ?
2. Quelle est la probabilité que vous gagniez votre pari ?

Exercice 19. *Sondage*

Quelqu'un interroge au hasard 6 personnes différentes dans un groupe de 22 personnes composé de

- 8 personnes salariées,
- 7 personnes au chômage,
- 7 personnes retraitées.

On note X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes salariées interrogées. Quelle est la loi de X ? Calculer $P(X = 2)$.