



Exercice 4

3] $X \sim \mathcal{H}(N, \frac{10}{4}, c)$ → approche par $\mathcal{B}(n, \frac{c}{N})$ si N grand

cours: si $X \sim \mathcal{H}(N, G, n)$ alors $V(X) \leq n \frac{G}{N} (1 - \frac{G}{N})$

ici: $V(X) \leq 6 \cdot \frac{1}{4} (1 - \frac{1}{4}) = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{8}$

Exercice 15

6 jetons: 0,0,1,2,2,2

Tirage sans remise: $X: 1 \dots$
 $Y: 2 \dots$

1] Loi de (X, Y)

	$X=0$	$X=1$	$X=2$	Loi de Y
$Y=0$	$\frac{2}{30}$	$\frac{2}{30}$	$\frac{6}{30}$	$\frac{10}{30}$
$Y=1$	$\frac{2}{30}$	0	$\frac{3}{30}$	$\frac{5}{30}$
$Y=2$	$\frac{6}{30}$	$\frac{3}{30}$	$\frac{6}{30}$	$\frac{15}{30}$
Loi de $X \rightarrow$	$\frac{10}{30}$	$\frac{5}{30}$	$\frac{5}{30}$	

$$\begin{aligned} P(Y=0 \cap X=2) \\ &= P(X=2) P(Y=0 | X=2) \\ &= \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{30} \end{aligned}$$

sachant que $X=2$ après le 1^{er} tirage
il reste 5 jetons dont 2 portent
le numéro 0.

$$P(Y=1 \cap X=1) = P(X=1) P(Y=1 | X=1) = \frac{1}{6} \cdot 0 = 0$$

$$P(Y=2 \cap X=2) = P(X=2) P(Y=2 | X=2) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{30}$$

Vérification: $\sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} P(X=x \cap Y=y) = 1$

la somme des 9 cases du tableau vaut 1
Quand il ne reste qu'une case à remplir, on
peut aussi dire que sa valeur est 1 - (somme des
autres)

la loi de X se lit en faisant les sommes
par colonnes $P(X=x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P(X=x \cap Y=y)$

$$2] E[X] = 0 \cdot \frac{10}{30} + 1 \cdot \frac{5}{30} + 2 \cdot \frac{15}{30} = \frac{35}{30}$$

Y la même loi que X donc $E[Y] = E[X]$

$$3] XY(\Omega) = \{0, 1, 2, 4\} \quad \begin{aligned} P(XY=1) &= P(X=1 \cap Y=1) = 0 \\ P(XY=2) &= P(X=1 \cap Y=2) \cup (X=2 \cap Y=1) \\ &\quad \text{? incompatibles} \\ &= P(X=1 \cap Y=2) + P(X=2 \cap Y=1) \\ &= \frac{3}{30} + \frac{3}{30} = \frac{6}{30} \end{aligned}$$

$$P(XY=4) = P(X=2 \cap Y=2) = \frac{6}{30}$$

$$\begin{aligned} E[XY] &= 0 \cdot P(XY=0) + 1 \cdot P(XY=1) + 2 \cdot P(XY=2) + 4 \cdot P(XY=4) \\ &= 0 + 0 + 2 \cdot \frac{6}{30} + 4 \cdot \frac{6}{30} = \frac{36}{30} \end{aligned}$$

Covariance

$$\text{Cov}(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$$

$$\rightarrow X \text{ et } Y \text{ indép} \Rightarrow \text{Cov}(X, Y) = 0$$

$$\rightarrow \text{Cov}(X, Y) > 0 \Leftrightarrow \text{si on sait que } X \text{ est grand, alors } Y \text{ a + de chance d'être grand}$$

$$\rightarrow \text{Cov}(X, Y) < 0 \Leftrightarrow \text{petit}$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) &= E[XY] - E[X]E[Y] \\ &= \frac{36}{30} - \left(\frac{35}{30}\right)^2 = \frac{6}{5} - \left(\frac{7}{6}\right)^2 = \frac{6}{5} - \frac{49}{36} = \frac{216 - 245}{5 \cdot 36} < 0 \end{aligned}$$

$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ TRANSFERT 2D LOTUS

$$f(x, y) = \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} f(x, y) P(X=x \cap Y=y)$$

Coeff de corrélation

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} \quad \text{avec} \quad \sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$$

Thm: $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$

$$\rho(X, Y) = \pm 1 \Leftrightarrow \exists a, b \text{ tq } Y = aX + b$$

11

Exercice 1

Chaque personne choisit une revue au hasard parmi les N .

N_{n,i_0} = nb de personnes parmi n qui ont choisi la revue i_0

1] $X_{n,i_0} \sim \mathcal{B}(n, \frac{1}{N})$. Considérons l'expérience de Bernoulli "une personne choisit une revue" dont le succès est "elle choisit une revue i_0 " (ce qui arrive avec probas $\frac{1}{N}$). On répète n fois cette expérience de façon indépendante et X_{n,i_0} est le nombre de succès. Donc $X_{n,i_0} \sim \mathcal{B}(n, \frac{1}{N})$

2] Si $n, N \rightarrow \infty$ et $\frac{n}{N}$ laue. X_{n,i_0} converge (en loi) vers $P(X)$

Exercice 11

$p = 0,05$ err de Bit
inverse

répète n fois

1) $X \sim \mathcal{B}(1, 0,05)$

$$X \sim \mathcal{B}(3, 0,05)$$

$$P(X=0) = \binom{3}{0} (0,05)^0 (0,95)^3 \\ = 1 \cdot 1 \cdot 0,95^3 \approx 0,86$$

S'il y a 2 ou 3 erreurs, on va penser que c'est 1 qui a été
envoyé : On se trompe

S'il y a 0 ou 1 erreur on devine correctement que c'est 0.

$$P(\text{se tromper}) = P(X=2 \cup X=3) = P(X=2) + P(X=3)$$

$$= \binom{3}{2} 0,05^2 0,95 + \binom{3}{3} 0,05^3 = 3 \cdot \frac{1}{20^2} \cdot \frac{19}{20} + \frac{1}{20^3} = \frac{58}{20^3} \approx 0,0072$$

$$P(\text{ne pas se tromper}) = 1 - P(X=2 \cup X=3) \\ = 1 - 0,0072 = 0,9928$$

2) $Z = \{0, 1\}$ $P(\{1\}) = \frac{9999}{10000}$

$$P(\{0\}) = \frac{1}{10000}$$

3) Notons Z la v.a. égal au bit qu'on envoie
(et qui est répété n fois)

X = nombre d'erreurs

Y = nombre de 0 dans le mot

Si $Z=1$ on envoie $\underbrace{1 \dots 1}_{n \text{ fois}}$

Alors $Y=X$

Si $Z=0$ on envoie $\underbrace{0 \dots 0}_{n \text{ fois}}$

alors $Y=n-X$

$$Y = ZX + (1-Z)(n-X)$$

$$Y(Z) \in [0, n]$$

Soit $k \in [0, n]$

$$P(Y=k) = P(Z=1)P(Y=k|Z=1) + P(Z=0)P(Y=k|Z=0)$$

$$= \underbrace{\left(1 - \frac{1}{10^4}\right)}_{P(X=k|Z=1)} \cdot P(X=k) + \underbrace{\frac{1}{10^4}}_{P(n-X=k|Z=0)} P(n-X=k)$$

car $X \in Z$ indep.

$$= P(X=k) + \frac{P(X=n-k) - P(X=k)}{10^4}$$

NB: $P(Y=k) > P(X=k) \Leftrightarrow P(X=n-k) > P(X=k)$

NB: $E[Y] = E[ZX] = E[(1-Z)(n-X)] = E[Z]E[X] + E[1-Z]E[n-X]$
car $X \in Z$ indep.
 $= E[Z]E[X] + (1-E[Z])(n-E[X])$

Y $n=3$ On cherche $P(Z=1 | Y=3)$

$$P(Z=1 | Y=3) = \frac{P(Z=1 \cap Y=3)}{P(Y=3)} = \frac{P(Z=1 \cap X=3)}{P(Y=3)}$$
$$= \frac{P(Z=1)P(X=3)}{P(Y=3)} \quad Z \text{ et } X \text{ indep}$$

$$\approx P(Z=1) = \frac{9999}{10000} = 1 - \frac{1}{10^4}$$

000
9999

5) On cherche n tq

$$P(Z=1 | Y=n) \leq 0,005$$

$$\Leftrightarrow \frac{P(Z=1 \cap Y=n)}{P(Y=n)} \leq 0,005$$

$$\Leftrightarrow \frac{P(Z=1)P(X=n)}{P(Y=n)} = \frac{P(X=n)}{P(Y=n)} \leq \frac{1}{20} \frac{1}{1-10^{-4}} \approx \frac{1}{20}$$

$$\Leftrightarrow P(Y=n) \geq 20 P(X=n)$$

$$\Leftrightarrow P(X=n) + \frac{P(X=0) - P(X=n)}{10^4} \geq 20 P(X=n)$$

$$\Leftrightarrow P(X=0) - P(X=n) \geq 10^4 \cdot 19 P(X=n)$$

$$\Leftrightarrow P(X=0) \geq (19 \cdot 10^4 + 1) P(X=n)$$

$$\Leftrightarrow 0,95^n \geq (19 \cdot 10^4 + 1) 0,05^n$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{0,95}{0,05} \right)^n \geq 19 \cdot 10^4 + 1$$

$$\Leftrightarrow 19^n \geq 190001 \quad (\Leftrightarrow n \geq 5)$$