



exercice 12

$$1) \forall n \in \mathbb{Z} \quad P(X=n) = \begin{cases} \frac{1}{n^2} \frac{6}{\pi^2} & \text{si } n \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$X \text{ existe car } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \frac{6}{\pi^2} = \frac{\pi^2}{6} \cdot \frac{6}{\pi^2} = 1$$

$$E[X] \text{ existe} \Leftrightarrow X \text{ est intégrable} \Leftrightarrow \sum_{n \in \mathbb{Z}} n P(X=n) \text{ est ACV}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} n \frac{1}{n^2} \frac{6}{\pi^2} \text{ est ACV}$$

ce qui est faux
car $\sum \frac{1}{n}$ diverge

Donc X n'est pas intégrable $\Rightarrow E[X]$ n'existe pas.
Comme X est positive on peut dire que $E[X] = +\infty$

$$2) \forall n \in \mathbb{Z}, \quad P(Y=n) = \begin{cases} \frac{1}{n^4} \frac{45}{\pi^4} & \text{si } n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} P(Y=n) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P(Y=n) + \sum_{n=1}^{+\infty} P(Y=-n) + P(Y=0) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} \frac{45}{\pi^4} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(-n)^4} \frac{45}{\pi^4} + 0 \\ &= \frac{90}{\pi^4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{90}{\pi^4} \frac{\pi^4}{90} = 1 \end{aligned}$$

Donc Y existe

$$E[Y] \text{ existe} \Leftrightarrow \sum_{n \in \mathbb{Z}} n P(Y=n) \text{ est ACV}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n| P(Y=n) \text{ est CV}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} n P(Y=n) \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} (-n) P(Y=-n) \text{ CV}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} \frac{45}{\pi^4} \text{ CV (ce qui est le cas)}$$

Donc $E[Y]$ existe.

$$\begin{aligned} E[Y] &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} n P(Y=n) = \sum_{n=1}^{+\infty} n P(Y=n) + \sum_{n=1}^{+\infty} (-n) P(Y=-n) \quad \text{égaux} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} n P(Y=n) - \sum_{n=1}^{+\infty} n P(Y=n) = 0 \end{aligned}$$

mardi 26 CC

$$3) \forall n \in \mathbb{Z}, P(Z=n) = \begin{cases} \frac{1}{n^2} \frac{3}{\pi^2} & \text{si } n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} P(Z=n) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P(Z=n) + \sum_{n=1}^{+\infty} P(Z=-n) + P(Z=0) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \frac{3}{\pi^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \frac{3}{\pi^2} + 0 \\ &= \frac{6}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{6}{\pi^2} \cdot \frac{\pi^2}{6} = 1 \end{aligned}$$

Donc Z existe.

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |n| P(Z=n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{|n|} \frac{3}{\pi^2} \quad \text{qui diverge, donc } Z \text{ n'est pas int\'egrable.}$$

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad P(Z=n) = P(Z=-n)$$

Exercice 2

1. $X \sim \text{Pois}(\lambda)$ $\lambda = 2$

car rarement 1 dans 100 fois il faut refaire un couzonne, donc c'est une loi de poisson avec $\frac{1}{100} \cdot 200 = 2$ dans un an

2. On va calculer combien le docteur perd : $500 \cdot X$

$$\begin{aligned} E[500 \cdot X] &= \sum_x 500x P(X=x) = \sum_x \frac{500x \cdot 2^x}{x!} e^{-2} \\ &= 500 \cdot e^{-2} \cdot 2 \sum_x \frac{2^{x-1}}{(x-1)!} \\ &= 500 \cdot e^{-2} \cdot 2 e^2 = 500 \cdot 2 = 1000 \end{aligned}$$

Docteur gagne: $100 \cdot 200 = 20000$
 $\hookrightarrow 20000 - 1000 = \underline{\underline{19000}}$

Exercice 2 de Prof

1] Considérons l'expérience de Bernoulli :

"poser une couronne" dont le succès est "il faut la refaire" avec probas: $\frac{1}{100}$

On répète 200 fois cette expérience de façon indépendante et X est le nombre de succès.

Donc $X \sim B(200, \frac{1}{100})$

2] Notons G la somme gagnée par le dentiste en 1 an.

On a: $G = \underbrace{100}_{\text{gain par couronne}} \cdot \underbrace{(200-X)}_{\text{nombre de couronnes correcte}} - \underbrace{500}_{\text{perte par mauvaise couronne}} \cdot \underbrace{X}_{\text{nombre de couronnes défectueuse}}$

$$G = 100 \cdot 200 - 500 \cdot X$$

$$\begin{aligned} E[G] &= E[20000 - 500X] = 20000 - 500E[X] \\ &= 20000 - 500 \cdot 200 \cdot \frac{1}{100} = \\ &= 15000 \end{aligned}$$

3] Thm. Soit (X_n) une suite de v.a. tq $X_n \sim B(n, p_n)$

Supposons $\lim_{n \rightarrow \infty} np_n = \lambda > 0$. Alors on peut approcher la loi de X_n par une loi de Poisson de paramètre λ , pour n grand.

$$\forall j \in \mathbb{N} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = j) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^j}{j!} = P(Y = j) \quad \text{où } Y \sim \text{Pois}(\lambda)$$

Ex $X \sim B(n, p)$ avec n grand (≥ 30) et np petit (≤ 5)

Alors on peut appliquer la loi de X par $P(\lambda)$ avec $\lambda = np$

Ex On approche la loi de X par $\text{Pois}(2)$

$$X \sim B(200, \frac{1}{100}), \quad \forall j \in \mathbb{N}, \quad P(X=j) \approx e^{-2} \frac{2^j}{j!}$$

$$\begin{aligned} P(G < 18000) &= P(20000 - 500X < 18000) = P(500X > 2000) \\ &= P(X > 4) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - e^{-2} \left(\frac{2^0}{0!} + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{e^2} \left(1 + 2 + 2 + \frac{4}{3} + \frac{2}{3} \right) = 1 - \frac{9}{e^2} \\ &\approx \frac{0.3}{2.7} \approx 0.04 \end{aligned}$$

$$P(X=4) = \binom{200}{4} \left(\frac{1}{100} \right)^4 \left(\frac{99}{100} \right)^{196}$$

impossible de calculer

Exercice 4

N inscrits, $\frac{N}{4}$ retraités, on choisit 6

1) $\text{Hyp}(\frac{N}{4}, \frac{3N}{4}, 6)$

On tire 6 personnes au sort sur la liste

On note X le nombre de retraités.

On peut modéliser expérience par une urne contenant N boules (qu'on peut distinguer) dont $\frac{N}{4}$ rouges, et le reste verts.

On tire simultanément 6 boules et on note X le nombre de boules rouges tirées. Alors $\forall k \in \llbracket 0, 6 \rrbracket$ $P(X=k) = \frac{\binom{N/4}{k} \binom{N-N/4}{6-k}}{\binom{N}{6}}$

Si $N=20$ et $k=6$, on a le coeff. binomiale $\binom{5}{6}=0$
donc $P(X=6)=0$ car il ya $\frac{20}{4}=5$ retraités impossible d'avoir 6)

NB: Si $X \sim \mathcal{H}(N, G, n)$ alors

$$X(\Omega) = \llbracket 0, \min(n, G) \rrbracket$$

En pratique on a en générale $G > n$.

2) $E[X] = \frac{\frac{N}{4} \cdot 6}{\frac{N}{4} + \frac{3N}{4}} = \frac{\frac{3N}{2}}{N} = \frac{3}{2}$

$$E[X] = 6 \cdot \frac{\frac{N}{4}}{N} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

3) $6 - \frac{3}{2} = \frac{12-3}{2} = \frac{9}{2} \quad ?$

4) $N=20 \quad P(X=5) = \frac{\binom{5}{5} \binom{15}{1}}{\binom{20}{6}} = \frac{15}{\frac{20!}{6!(14)!}} = \frac{15 \cdot 6!}{15 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20}$

$$\begin{aligned} &= \frac{720}{16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20} \\ &= \frac{36}{16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19} \\ &= \frac{2}{16 \cdot 17 \cdot 19} = \frac{1}{8 \cdot 17 \cdot 19} \\ &= \frac{1}{2584} \approx \frac{1}{2600} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 6 \\ 17 \\ 19 \\ \hline 153 \\ 14 \\ \hline 323 \\ 8 \end{array}$$

5) Thm Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a. tq $X_i \sim \mathcal{H}(N_i, G_i, n)$

avec $N_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} +\infty$ et $\frac{G_i}{N_i} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} p \in [0, 1]$ Alors

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad P(X_i = k) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = P(Y = k) \\ \text{où } Y \sim \mathcal{B}(n, p)$$

Application pratique: Si $X \sim \mathcal{H}(N, G, n)$

avec N grand (≥ 30) et $\frac{G}{N}$ ni trop petit ni trop grand
($0.05 \leq \frac{G}{N} \leq 0.95$)

alors on peut appliquer la loi de X par $\mathcal{B}(n, \frac{G}{N})$

Ex: $X \sim \mathcal{H}(N, \frac{N}{4}, 6)$ avec $N \approx 10^6$
On approxime la loi de X par $\mathcal{B}(6, \frac{1}{4})$

$$P(X=5) \approx \binom{6}{5} \left(\frac{1}{4}\right)^5 \left(\frac{3}{4}\right)^1 = 6 \cdot \frac{3}{4^5} \approx 0.004$$

exercice 15

$$P(X=0 \text{ et } Y=0) \\ = P(X=0)P(Y=0 | X=0) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{30}$$

$$\text{Cov}(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$$