



Exercice 10

$$1) \Leftrightarrow p_i = ap_{i-1} + b$$

$$p_i = P(B_i)$$

$$\text{avec } a = \frac{z_1}{z_1 + v_1} - \frac{z_2}{z_2 + v_2} \quad \text{et} \quad b = \frac{z_2}{z_2 + v_2}$$

$$\text{et } p_1 = \frac{1}{2} \frac{z_1}{z_1 + v_1} + \frac{1}{2} \frac{z_2}{z_2 + v_2}$$

$$p_i = ap_{i-1} + b$$

$$l = al + b \quad \text{soit} \quad l = \frac{b}{1-a}$$

$$p_i - l = a(p_{i-1} - l) \Rightarrow \frac{p_i - l}{a} = p_{i-1} - l$$

$$\Leftrightarrow \frac{p_i - l}{a} + l = p_{i-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{p_i - l + la}{a} = p_{i-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-l + la}{a} = p_{i-1} - \frac{p_i}{a}$$

$$u_i = p_i - l$$

$$u_i = au_{i-1} = u_i = a^{i-1}u_1 \quad \text{soit} \quad u_i = p_i - l = p_i - \frac{b}{1-a}$$

$$\text{On a } \frac{z_i}{z_i + v_i} \in]0, 1[\quad \forall i \in \{1, 2\} \quad \text{donc } a \in]-1, 1[\quad \text{donc } a \neq 1$$

$$\text{Posons } l = \frac{b}{1-a} \quad \text{On a : } \begin{cases} p_i = ap_{i-1} + b \\ l = al + b \end{cases} \quad \forall i \geq 2 \quad \text{donc } (p_i - l) = a(p_{i-1} - l)$$

$$\text{Donc } p_i - l = a^{i-1}(p_1 - l) \quad \text{donc } p_i = l + a^{i-1}(p_1 - l) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} l$$

car $|a| < 1$

Comment calculer $E[X]$?

① Si on connaît la loi de X : $E[X] = \sum_{x \in X(\Omega)} x P(X=x)$

(si $X(\Omega)$ est dénombrable, s'assurer que la série c.v. absolument est sommable)

② Si $X = \sum \lambda_i X_i$: Utiliser la linéarité

③ Si $X = f(Y)$ alors par transfert $E[X] = \sum_{y \in Y(\Omega)} f(y) P(Y=y)$

④ Si X suit une loi connue c'est du cours

2] $E[X_n] = ?$

Astuce: Si $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$

alors $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i$ est le nombre d'indices i tq $\varepsilon_i = 1$

$$E[X_n] = E\left[\sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{B_i}\right]$$

$$\text{Ici: } X_n = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{B_i}$$

$$E[X_n] = \sum_{i=1}^n E[\mathbb{1}_{B_i}] = \sum_{i=1}^n p_i = \sum_{i=1}^n 1 + (p_i - 1) \sum_{i=1}^n a^{i-1} = n + (p_i - 1) \frac{(1-a^n)}{1-a} \quad \text{car } a \neq 1$$

| par linéarité | car $\mathbb{1}_{B_i} \sim \mathcal{B}(p_i)$

Exercice 13

1. X - géométrique

2. $E[X] = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$ (nbre de lancer)

$$5 \cdot 2^{E[X]-1} = 5 \cdot 2^1 = 10 \text{ euros}$$

1. On lance la pièce de façon identique et indépendante jusqu'à obtenir pile pour la première fois. À chaque lancer la proba d'obtenir pile est $\frac{1}{2}$. Donc le nbre de lancers noté X , suit la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$

Notons G le gain à l'issue du jeu
On cherche $E[G]$

On a $G = 5 \cdot 2^{X-1}$ car si X vaut n on a obtenu $n-1$ fois "Face" avant d'avoir pile donc les 5 € de début est multiplié par 2^{n-1}

$$\begin{aligned} \text{Par transfert } E[G] &= E[5 \cdot 2^{X-1}] = \sum_{x \in X(\Omega)} 5 \cdot 2^{x-1} \cdot P(X=x) \\ &= \sum_{x \in \mathbb{N}^*} 5 \cdot 2^{x-1} \cdot \frac{1}{2} = \sum_{x=1}^{+\infty} \frac{5}{2} \quad \text{diverge} \end{aligned}$$

1^{ère} conclusion : " $E[G] = +\infty$ " : même si on paye 1 000 000 € pour jouer à ce jeu, en moyenne on est gagnant! (en théorie)

2^{ème} conclusion : on a manqué de rigueur!
Il a fallu vérifier que $E[G]$ existe

Rappel: $E[X]$ existe $\Leftrightarrow X$ intégrable

$\Leftrightarrow X$ d'espérance finie

$$\Leftrightarrow \sum_{x \in X(\Omega)} |x| P(X=x) < +\infty$$

$$\Leftrightarrow \sum_{x \in X(\Omega)} x P(X=x) \text{ est ACV}$$

à faire:

Thm de transfert

Alors, si on choisit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et

$$\forall n, n' \in \mathbb{N} \quad n \neq n' \Rightarrow x_n \neq x_{n'} \quad \text{et } X(\Omega) = \{x_n, n \in \mathbb{N}\},$$

$$\text{alors } E[X] = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n P(X=x_n)$$

Donc $\sum_{x \in X(\Omega)} 5 \cdot 2^{x-1} P(X=x)$ diverge, donc G n'est pas intégrable.

Pour une v.a. positive, si elle n'est pas intégrable, on peut que son espérance est $+\infty$

Idee: écrire $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$ n'est pas grave.

Si (u_n) est à terme positifs et diverge on peut écrire $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$

Dans cet exercice, comme $G \geq 0$, on peut écrire $E[G] = +\infty$
le gain moyen est $+\infty$

Exercice 6

$$3) X \sim \mathcal{P}(\lambda)$$

$$P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \Rightarrow E[X] = \lambda$$

$$P(Y=n | X=n) = \mathcal{B}(n, p)$$

X = nombre de pannes de l'ascenseur sur 1 an.

À chaque fois que l'ascenseur tombe en panne, la proba que qqn le signale au réparateur est p .

On suppose que l'ascenseur sera réparé que la panne sera réparée ou non |

On note Y le nombre de pannes signalées au réparateur en 1 an.

$$\begin{aligned} \text{On a } Y(\Omega) = \mathbb{N} \quad \text{Soit } y \in \mathbb{N}. \text{ On a:} \\ P(Y=y) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \underbrace{P(Y=y | X=k)}_{\substack{\text{c'est } \begin{cases} 0 & \text{si } y > k \\ \binom{k}{y} p^y (1-p)^{k-y} & \text{si } y \leq k \end{cases}}} \underbrace{P(X=k)}_{\substack{\frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \\ \text{par la formule de proba totale}}} \end{aligned}$$

avec la partition $([X=k])_{k \in \mathbb{N}}$

car sachant que $X=k$, Y suit $\mathcal{B}(k, p)$

Si X va alors

$\sum_{x \in X(\Omega)} P(X=x)$ cv et vaut 1 car $(X=x)$ forment une partition

Thm (formule de probas totales): Si $(A_i)_{i \in I}$ partition et A événement, alors:

(i) $\sum_{i \in I} P(A|A_i)P(A_i)$ cv

(ii) $P(A) = \sum_{i \in I} P(A|A_i)P(A_i)$

$$\begin{aligned} P(Y=y) &= \underbrace{\sum_{k=0}^{y-1} 0}_{0 \text{ si } y > n} + \sum_{n=y}^{+\infty} \binom{k}{y} p^y (1-p)^{k-y} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \\ &= \sum_{n=y}^{+\infty} \frac{k!}{y!(k-y)!} p^y (1-p)^{k-y} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \\ &= \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j! j!} p^y (1-p)^j e^{-\lambda} \lambda^{j+y} \\ &= \frac{p^y e^{-\lambda} \lambda^y}{y!} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(1-p)^j \lambda^j}{j!} = \frac{(\lambda p)^y e^{-\lambda}}{y!} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(\lambda(1-p))^j}{j!} \right) \end{aligned}$$

c'est $e^{\lambda(1-p)}$