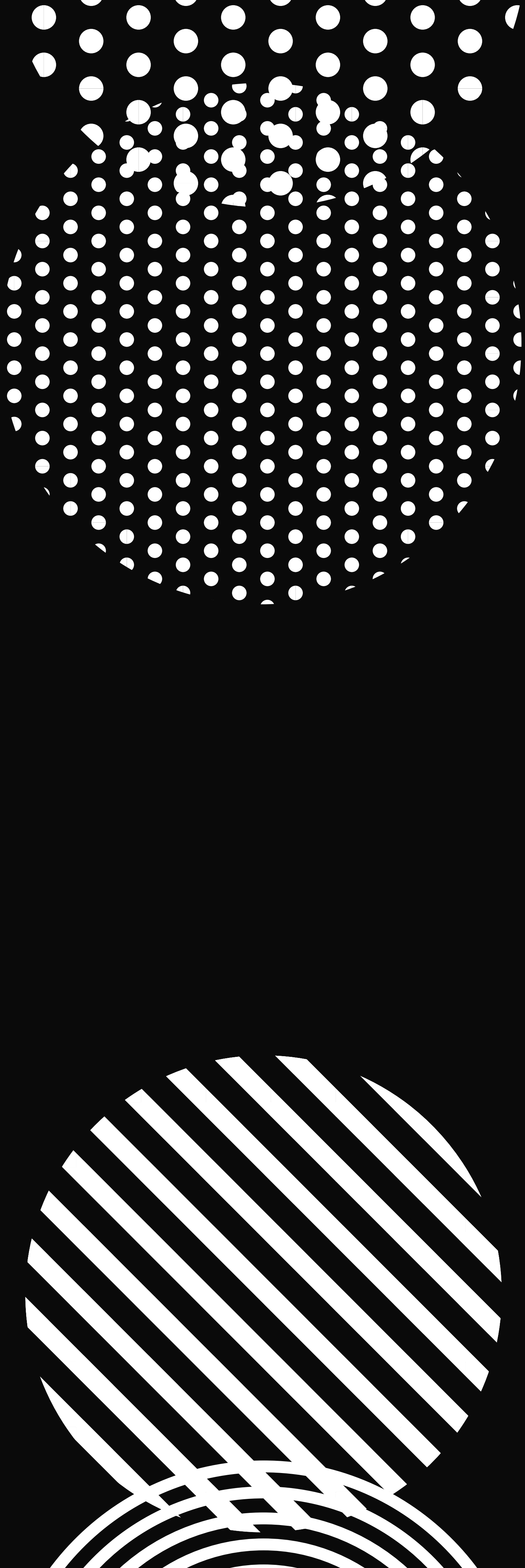

3, 5, 6, 10, 9

Exercice 3

2] preuve que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$

pv combinatoire : Dans une urne il y a n boules rouges et n boules bleus, toutes distinctes. On tire simultanément n boules. Combien y a-t-il de tirages possibles ?

1ère approche: $\binom{2n}{n}$

2ème approche: on distingue selon les nombres k de boules rouges tirées. Pour k fixé il y a $\binom{n}{k}$ choix pour les rouges et $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$ choix pour les bleus, donc $\binom{n}{k}^2$ au total. Comme $k \in [\![0, n]\!]$ par principe additif on a finalement $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$ possibilités.

pv ensembliste: $\mathcal{P}_n([\![1, 2n]\!]) \to \bigsqcup_{k=0}^{n} \mathcal{P}_k([\![1,n]\!]) \times \mathcal{P}_{n-k}([\![n+1, 2n]\!])$

$A \longmapsto (A \cap [\![1,n]\!], A \cap [\![n+1, 2n]\!])$

pv algebrique :

$(1+X)^n (1+X)^n = (1+X)^{2n}$ dans $\mathbb{R}[X]$

$$\left(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} X^i\right)\left(\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} X^j\right) = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} X^k$$

les coeff de X^n des deux cotés sont égaux : $\sum_{i+j=n} \binom{n}{i}\binom{n}{j} = \binom{2n}{n}$

↳ ici $j = n-i$

1] $P(B=S) = \frac{1}{4^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}$

$P(B=S) = P(B = n-S) = P(B+S=n) = \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}$

car S et $n-S$ suivent la même loi $\mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$
B et S sont indép.
B et $n-S$ sont indép.

car $B+S$ suit loi $\mathcal{B}(2n, \frac{1}{2})$ comme somme de 2 v.a. indep. qui suivent $\mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$

2] $1 = P(B=S) + P(B>S) + P(B<S)$ car ces 3 évènements forment une partition de Ω. Ils sont égaux par symmetrie du problème

$1 = P(B=S) + 2P(B>S)$

$$P(B>S) = \frac{1-P(B=S)}{2} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}\right)$$

Exercice 5

On considère un cerfeuil particulier (choisi aléatoirement)
On note X son nombre de descendant
↳ enfants

Parmi les enfant chacun a 20% de chance d'être stéril.

1) $E(X) = \frac{0 + N-1}{2} = \frac{N-1}{2}$

En reportant de la def : $E(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} k P(X=k)$

ici $E(X) = \sum_{k=0}^{N-1} k \cdot \frac{1}{N} = \frac{1}{N} \cdot \frac{(N-1)N}{2} = \frac{N-1}{2}$

2) a) Y = nbre de descendants stérile
Pour montrer que 2 v.a X et Y ne sont pas indép., exhiber i et j tq $P(X=i)>0$, $P(Y=j)>0$ et $P(X=i \cap Y=j) = 0$

Ici on prend $i=0$, $j=1$: $P(\underbrace{X=0}_{\text{proba qu'aucun descendant}}) > 0$, $P(\underbrace{Y=1}_{\text{proba qu'un descendant et stérile}}) > 0$ (car $N \geq 2$)
mais $\underbrace{P(X=0 \cap Y=1)}_{\text{proba qu'il n'y a aucun descendant, et un descendant est stérile}} = 0$: impossible.
donc 0.

b) comment calculer $P(A|B)$? → déf : $\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
→ Bayes
→ si A est liée à une v.a Y, cherchez la loi de Y sachant B

Soit $n \in [\![0, N-1]\!]$. La loi de Y sachant $[X=n]$ est $\mathcal{B}(n, \frac{1}{5})$.
En effet, on suppose que $X=n$, i.e que le cerfeuil a eu n descendants. Pour chaque descendant on a une épreuve de Bernoulli, dont le succès est qu'il soit stérile (proba 20% $= \frac{1}{5}$)
Ces épreuves sont supposés indép. et Y compte le nombre de succès.

Donc $\forall i \in [\![0, n]\!]$ $P(Y=i | X=n) = \binom{n}{i} \left(\frac{1}{5}\right)^i \left(\frac{4}{5}\right)^{n-i}$

Y ~~suit $\mathcal{B}(X, \frac{1}{5})$~~ les paramètres d'une loi doivent être des réels déterministes, pas des v.a.

c) $P(Y=i\cap X=n) = P(X=n)\,P(Y=i\mid X=n)$

$= \frac{1}{N}\cdot\binom{n}{i}\frac{4^{n-i}}{5^n}$ si $i\in[\![0,n]\!]$, 0 si $i\in]\!]n+1,N]\!]$

Donc $P(Y=i) = \sum_{n=0}^{N-1} P(Y=i\cap X=n)$ par la formule de probabilités totales appliqués à la partition $([X=n])_{0\leq n\leq N-1}$

$$P(Y=i) = \frac{1}{N}\cdot\sum_{n=0}^{i-1} 0 + \sum_{n=i}^{N-1}\frac{1}{N}\binom{n}{i}\frac{4^{n-i}}{5^n}$$

$$P(Y=i) = \frac{1}{N}\sum_{n=i}^{N-1}\binom{n}{i}\frac{4^{n-i}}{5^n}$$

d) $E(Y) = \sum_{i=0}^{N-1} i\,P(Y=i) = \sum_{i=0}^{N-1} i \sum_{n=0}^{N-1} P(X=n)\,P(Y=i\mid X=n)$

$$E(Y) = \sum_{n=0}^{N-1} P(X=n) \underbrace{\sum_{i=0}^{N-1} i\,P(Y=i\mid X=n)}_{\text{noté } E(Y\mid X=n)}$$

formule des esperances totales.

$$= \sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{N}\cdot n\cdot\frac{1}{5}$$

$$= \frac{1}{5N}\cdot\frac{(N-1)N}{2} = \frac{N-1}{2}\cdot\frac{1}{5}$$

Faire : loi conditionnel

Exercice 6

1) $\mathcal{U}$ suit $\mathcal{U}([\![1,n]\!])$

$$\forall k \in [\![1,n]\!] \begin{cases} P(V=1 \mid \mathcal{U}=k) = \frac{k}{n} \\ P(V=0 \mid \mathcal{U}=k) = 1-\frac{k}{n} \end{cases}$$

Sachant que $\mathcal{U}=k$, V suit $\mathcal{B}(\frac{k}{n})$
V est à valeur dans $\{0,1\}$ donc
suit une loi de Bernoulli de paramètre
$p = P(V=1) = \sum_{k=1}^{n} P(\mathcal{U}=k)P(V=1 \mid \mathcal{U}=k)$
par la formule des probabilités totales avec
la partition $([\mathcal{U}=k])_{k\in[\![1,n]\!]}$

$$p = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\cdot\frac{k}{n} = \frac{1}{n^2}\,\frac{n(n+1)}{2}$$

$$p = \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$$

$$E(V) = p$$

exemple d'application

On tire un dé à n faces. On note k le résultat obtenu.
On met k boules rouges et $n-k$ bleus dans une urne.
On tire une boule.
V = "la boule tirée est rouge"
$\mathcal{U}$ = "résultat du dé"

Exercice 10

C_1	C_2
v_1	v_2
r_1	r_2

B_i = " $i^{\text{ème}}$ bouton tiré est rouge"

a) Notons C l'événement "au 1^{er} tirage on choisit le compartiment 1"

$$P(B_1) = P(B_1 \mid C)P(C) + P(B_1 \mid \bar{C})\cdot P(\bar{C})$$

$$P(B_1 \mid C) = \frac{r_1}{r_1+v_1}$$
$$P(B_1 \mid \bar{C}) = \frac{r_2}{r_2+v_2}$$

$$P(C) = \frac{1}{2} = P(\bar{C})$$

$$P(B_1) = \frac{r_1}{r_1+v_1}\cdot\frac{1}{2} + \frac{r_2}{r_2+v_2}\cdot\frac{1}{2}$$

b] $i \geq 2$ $P(B_i | B_{i-1})$

$P(B_i | B_{i-1}) = \frac{r_1}{r_1+v_1}$ car on suppose avoir tiré une boule rouge, alors on tire le bouton suivant de C_1 au $i^{ème}$ tirage

c] Notons $p_i = P(B_i)$ pour $i \geq 1$

$P(B_i) = P(B_i | B_{i-1}) \cdot P(B_{i-1}) + P(B_i | \overline{B_{i-1}}) \cdot P(\overline{B_{i-1}})$
par la formule de probabilité totale.

$P(B_i) = \frac{r_1}{r_1+v_1} p_{i-1} + \frac{r_2}{r_2+v_2} \cdot (1 - p_{i-1})$

$p_i = \underbrace{\left(\frac{r}{r_1+v_1} - \frac{r_2}{r_2+v_2}\right)}_{a} p_{i-1} + \underbrace{\frac{r_2}{r_2+v_2}}_{b}$

2] $E(X_n) = E\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{B_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} (E(\mathbb{1}_{B_i}))$

finir exo 10