Exercice 3

S = "Syldaves" $\# S = n$
B = "Bordures" $\# B = n$

$P(S = k) = \mathcal{B}(n, \frac{1}{2}) = \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$
$P(B = k) = \mathcal{B}(n, \frac{1}{2}) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n$
Probas que k Syldaves venus et k Bordures venus
$P(S = k)\, P(B = k) = \binom{n}{k}^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$

Calculons avec tous les k possibles:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$

Il y a n boules rouges et n boules bleus.

On veut compter le nombre de possibilité de tirer n boules simultanément parmi n.

$: \underbrace{\sum_{k}^{n} \binom{n}{k}}_{k \text{ rouges parmi } n \text{ rouges}} \underbrace{\binom{n}{n-k}}_{= \binom{n}{k}} = \binom{2n}{n}$

$n-k$ bleus parmi n bleus

$k + n - k = n$ boules

mais le nombre de possbté est: $\binom{2n}{n}$

2) $1 = P(B = S) + P(B > S) + P(S > B)$
$= P(B = S) + 2P(B > S)$

$P(B > S) = P(S > B)$ par la symmetri du probleme.

$$\Rightarrow P(B > S) = \frac{1 - P(B = S)}{2}$$

$$= \frac{1 - \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n}}{2}$$

Exercice 5

X suit la loi uniforme sur $\{0, \dots, N-1\}$
Y "descendant stérile" $P(Y) = 0{,}2$

1. $E[X] = \frac{0+N-1}{2} = \frac{N-1}{2}$

2. (a) Soient i,j et $P(X=i)>0$, $P(Y=j)>0$
On prend $i=0$ et $j=1$
$\underbrace{P(X=0)}_{\text{proba qu'il y a aucun descendant}}>0$ $\underbrace{P(Y=1)}_{\text{proba qu'un descendant est stérile}}>0$

$X=0 \wedge Y=1 = \emptyset$ $P(X=0 \wedge Y=1) = 0 \neq P(X=0)\cdot P(Y=1)$

(b) On suppose que $X=n$, i.e il y a n descendant.
Donc $P(Y=i) = \mathcal{B}(n, \frac{1}{5}) = \binom{n}{i}\left(\frac{1}{5}\right)^i\left(\frac{4}{5}\right)^{n-i}$

(c) $P(Y=i \cap X=n) = P(X=n)\,P(Y=i \mid X=n) = \frac{1}{N}\binom{n}{i}\left(\frac{1}{5}\right)^i\left(\frac{4}{5}\right)^{n-i}$

Pour $i \leq n$ $P(Y) = \sum_{n=0}^{N-1} P(Y=i \cap X=n) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\binom{n}{i}\left(\frac{1}{5}\right)^i\left(\frac{4}{5}\right)^{n-i}$

$= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\binom{n}{i}\frac{4^{n-i}}{5^i \cdot 5^{n-i}}$

$= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\binom{n}{i}\frac{4^{n-i}}{5^n}$

(d) $E[Y] = \sum_{i=0}^{N-1} i\,P(Y=i) = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} i \sum_{n=0}^{N-1}\binom{n}{i}\left(\frac{4^{n-i}}{5^n}\right)$

$= \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} E[\mathcal{B}(n, \frac{1}{5})]$

$= \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} i \frac{n}{5}$