O
G
D
O
O
O
O
D

Exercice 6

1) $\mathcal{U}$ → v.a. unif

i.e $P(U=k)=\frac{1}{n}$ $E[U]=\frac{1+n}{2}$

V - Bernouilli cond. à $\mathcal{U}$

$P(V=1 \mid \mathcal{U}=k)=\frac{k}{n}$ $P(V=0 \mid \mathcal{U}=k)=1-\frac{k}{n}$

$$P(V=1)=\sum_{k=1}^{n} P(V=1 \mid \mathcal{U}=k) P(\mathcal{U}=k)$$

$$=\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \cdot \frac{1}{n}=\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}=\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2 n^2}=\frac{n+1}{2 n}$$

$$P(V=0)=\sum_{k=1}^{n} P(V=0 \mid \mathcal{U}=k) P(U=k)$$

$$=\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} 1-\frac{k}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{n-k}{n}=\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} n-k=\frac{1}{n^2} \cdot \frac{n}{2}=\frac{1}{2n}$$

$E[V]=\frac{n+1}{2n}$

2) X v.a loi unif sur $\{1,\dots,n\}$ $\Rightarrow P(X=k)=\frac{1}{n}$

Y v.a loi unif sur $\{1,\dots,X\}$

$P(Y=k \mid X=q)=\frac{1}{q}$

$$P(Y=k)=\sum_{i=1}^{n} P(Y=k \mid X=i) P(X=i)=\sum_{i=k}^{n} \frac{1}{i} \cdot \frac{1}{n}=\frac{1}{n} \sum_{i=k}^{n} \frac{1}{i}$$

$$E[Y]=\sum_{k=1}^{n} P(Y=k) \cdot k=$$

3| X - v.a

$$P(X=k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

$$E[X] = \lambda$$

$$P(Y=m \mid X=k) = \mathcal{B}(k,p) = \binom{k}{m} p^m (1-p)^{k-m}$$

$$P(Y=m) = \sum_{i=m}^{+\infty} P(Y=m \mid X=i)\, P(X=i) = \sum_{i=m}^{n} \binom{i}{m} p^m (1-p)^{i-m} e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}$$

$$= \sum_{i=m}^{+\infty} \frac{\cancel{i!}}{m!(i-m)!} p^m (1-p)^{i-m} e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{\cancel{i!}}$$

$$= \sum_{i=m}^{+\infty} \frac{p^m (1-p)^{i-m} \lambda^i}{m!(i-m)!} e^{-\lambda} = \frac{p^m e^{-\lambda}}{m!} \sum_{i=m}^{+\infty} \frac{(1-p)^{i-m}}{(i-m)!} \lambda^i$$

on pose $j = i-m$, alors: $\displaystyle \frac{p^m e^{-\lambda}}{m!} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(1-p)^j}{j!} \lambda^{j+m}$

$$= \frac{(\lambda p)^m e^{-\lambda}}{m!} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(\lambda(1-p))^j}{j!}$$

$$= \frac{(\lambda p)^m e^{-\lambda}}{m!} e^{\lambda(1-p)} = \frac{(\lambda p)^m e^{\lambda - \lambda p - \lambda}}{m!} = \frac{(\lambda p)^m e^{-\lambda p}}{m!}$$

Ce qui signifie que Y suit la loi de Poisson avec un paramètre λp

Exercice 10.

C_1 : v_1 verts r_1 rouges
C_2 : v_2 verts r_2 rouges

1) B_i : { $i^{\text{ème}}$ tirage - rouge } H_i : = { elle choisit 1 comp pour $i$ème tirage }

(a) $P(B_1) = P(H_1)P(B_1|H_1) + P(H_1^c)P(B_1|H_1^c)$

$P(H_1) = P(H_1^c) = \frac{1}{2}$
$P(B_i|H_i) = \frac{r_1}{r_1+v_1}$
$P(B_i|H_i^c) = \frac{r_2}{r_2+v_2}$

$\Rightarrow = \frac{1}{2}\left(\frac{r_1}{r_1+v_1} + \frac{r_2}{r_2+v_2}\right)$

(b) Si elle tire un bouton rouge, le tirage suivant elle effectue de C_1

Alors $P(B_i|B_{i-1}) = \frac{r_1}{r_1+v_1}$

(c) $p_i = a p_{i-1} + b$

Posons $l = al + b$

$p_i - l = a(p_{i-1} - l)$ posons $u_i = p_i - l$
$\Rightarrow u_i = a u_{i-1}$
$\Leftrightarrow u_i = a^{i-1} u_1$ $\left(l = \frac{b}{1-a}\right)$
$\Leftrightarrow p_i - l = a^{i-1} p_1 - a^{i-1} l$
$\Leftrightarrow p_i = l + a^{i-1}(p_1 - l) \xrightarrow[i \to +\infty]{} l$

2) $X_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{B_i}$ $\mathbb{1}_{B_i} \sim B(p_i)$

$E[X_n] = E[\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{B_i}] = \sum_{i=1}^{n} E[\mathbb{1}_{B_i}] = \sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{n} l + a^{i-1}(p_1 - l)$
$= \left(\sum_{i=1}^{n} l\right) + (p_1 - l)\sum_{i=1}^{n} a^{i-1} = nl + (p_1 - l)\, a \frac{1-a^n}{1-a^{n-1}}$

Exercice 13

1) $P(X=n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n}$ (géométrique)

2) $E[5\cdot 2^{X-1}] = \sum_{x\in\mathbb{N}^*} 5\cdot 2^{x-1}\cdot P(X=x) = \sum_{x\in\mathbb{N}^*} \frac{5}{2}\frac{2^x}{2^x} = \sum_{x\in\mathbb{N}^*}\frac{5}{2}$

qui diverge donc $+\infty$

3) Oui car je gagne infiniment d'argent en moyenne.