



G

O

D

O

O

O

O

D

Exercice 1

1) $\Omega = \{0, 1\}^n$

$$p(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k (1-p)^{n-k}$$

$X_{n,i}$ suit la loi de Bernoulli car on a n expériences où chaque expérience a la probabilité p de se produire.

$p = \frac{1}{N}$ car il y a N revues différentes et chaque client achète une des revues au hasard.

Donc $X_{n,i} \sim \mathcal{B}(n, \frac{1}{N})$

2) D'après le théorème du cours si n est assez grand et $np = \frac{n}{N} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda$ donc $X_{n,i}$ converge vers la loi de Poisson de paramètre $\frac{n}{N}$

Donc $X_{n,i} \sim P(\frac{n}{N})$

Exercice 2

1) Le dentiste pose 200 couronnes dont chacune a une probabilité $\frac{1}{100}$ à être à refaire donc X suit la loi de Bernoulli.

$$X \sim \mathcal{B}(200, \frac{1}{100})$$

$$\begin{aligned} \text{Dentiste gagne } & 600 \cdot 200 - 500 \cdot 200 - 500X \\ & = 100 \cdot 200 - 500X = 20000 - 500X \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[20000 - 500X] &= E[20000] - 500 E[X] \quad \text{par linéarité de l'espérance} \\ &= 20000 - 500 \cdot \frac{200}{100} \\ &= 20000 - 500 \cdot 2 \\ &= \underline{19000} \end{aligned}$$

3) Comme n est assez grand et p assez petit on peut approcher X par la loi de Poisson de paramètre $\lambda = np = 2$

$$\begin{aligned}
 & 4) \quad P(20000 - 500X < 18000) \\
 & = P(500X > 2000) \\
 & = P(X > 4) \\
 & = 1 - (P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4)) \approx 0.05 = 5\%
 \end{aligned}$$

Oui, il peut.

Exercice 3

On note $X \sim$ une variable aléatoire qui donne un nombre de boules rouges venues
et Y une v.a qui donne le nombre de
boules bleues venues.

Les deux suivent la loi de Bernoulli car
pour chacune il y a n expériences avec
probas $\frac{1}{4}$ de réussite

$$\begin{aligned}
 \text{Donc } X & \sim B(n, \frac{1}{4}) \\
 Y & \sim B(n, \frac{1}{4})
 \end{aligned}$$

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = P(Y=k)$$

On cherche à calculer $P(X=Y)$

$$\therefore \sum_{k=0}^n P(X=k \cap Y=k) = \sum_{k=0}^n P(X=k) P(Y=k) \quad \text{car } X \text{ et } Y \text{ indépendantes}$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 p^{2k} (1-p)^{2n-2k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{3}{4}\right)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 \left(\frac{1}{4}\right)^n = \left(\frac{1}{4}\right)^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$$

$$\sum_{k=0}^n \underbrace{\binom{n}{k} \binom{n}{n-k}}_{\text{calcul nombre de façon d'avoir}}$$

k boules rouges et $n-k$ boules bleues parmi n boules.

En sommant de 0 à n on calcule nombre de façon
d'avoir k rouges et $n-k$ bleues + $n-k$ rouges et k bleues
parmi n et n pour k particulière parmi n
comme on somme de 0 à n i.e. de 0 à $\frac{n}{2}$
on calcule $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$

Alors $P(X=Y) = \left(\frac{1}{4}\right)^n \binom{2n}{n}$

$P(X>Y) = P(Y>X)$ par symétrie car $X \sim \mathcal{B}(n, \frac{1}{4})$
 $Y \sim \mathcal{B}(n, \frac{1}{4})$

$1 - P(X=Y) = P(Y>X) + P(X>Y) = 2P(X>Y)$

Donc $P(X>Y) = \frac{1 - P(X=Y)}{2} = \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n \binom{2n}{n}}{2}$

Exercice 4

1. Il y a N personnes inscrites dont $\frac{N}{4}$ retraités
 on tire 6 personnes donc X suit la
 loi hypergéométrique.

$X \sim \mathcal{H}(N, \frac{N}{4}, 6)$

2] $E[X] = \frac{6 \cdot \frac{N}{4}}{N} = \frac{3}{2}$

3] $\text{Max} = 6$. espérance $= \frac{3}{2}$

alors écart-type maximale: $6 - \frac{3}{2} = \frac{12}{2} - \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$
 $\Rightarrow \max(\text{Var}(X)) = \left(\frac{9}{2}\right)^2 = \frac{81}{4}$

4] Si $N=20$ alors il y a $\frac{N}{4} = \frac{20}{4} = 5$ retraités

donc $P(X=5) = \frac{\binom{5}{5} \binom{15}{6}}{\binom{20}{6}} = \frac{15}{\frac{15 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20}$
 $= \frac{2 \cdot 3}{16 \cdot 17 \cdot 3} = \frac{1}{8 \cdot 17} = \frac{1}{136} \approx 0,007$

5] D'après le théorème du cercle si $N \rightarrow +\infty$ et $\frac{6}{N} \rightarrow 0 \in]0,1[$
 donc $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ $p = \frac{\frac{6}{N}}{1} = \frac{1}{4}$
 D'où $X \sim \mathcal{B}(6, \frac{1}{4})$

$P(X=5) = \binom{6}{5} \left(\frac{1}{4}\right)^5 \left(\frac{3}{4}\right) = \frac{6!}{5!} = 6 \left(\frac{1}{4}\right)^5 \cdot \frac{3}{4} = 18 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^6 \approx 0,004$
 $\approx 0,4\%$

Exercice 5

1) Soit X une v.a qui donne le nombre de descendant.
comme X suit la loi uniforme

$$E[X] = \frac{0 + N-1}{2} = \frac{N-1}{2}$$

2) Soit Y une v.a qui donne le nombre de descendant stériles.

(a) Non, contre exemple: $P(X=1 \cap Y=2) = 0 \neq P(X=1)P(Y=2)$
car si le nombre de descendant est 1, il est impossible d'avoir 2 descendant stériles.

(b) Sachant X , Y suit la loi de Bernoulli:
 $Y|X \sim B(X, \frac{1}{5})$
donc $P(Y=i|X=n) = \binom{n}{i} \left(\frac{1}{5}\right)^i \left(\frac{4}{5}\right)^{n-i}$ si $i \leq n$
 $= 0$ si $i > n$

$$(c) \quad P(Y=i \cap X=n) = P(Y=i|X=n)P(X=n) = \binom{n}{i} \left(\frac{1}{5}\right)^i \left(\frac{4}{5}\right)^{n-i} \frac{1}{N}$$

$$P(Y=i) = \sum_{n=0}^{N-1} P(Y=i|X=n)P(X=n) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \binom{n}{i} \left(\frac{1}{5}\right)^i \left(\frac{4}{5}\right)^{n-i}$$

$$= \left(\frac{1}{5}\right)^i \left(\frac{4}{5}\right)^i \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \binom{n}{i} \left(\frac{4}{5}\right)^{n-i}$$

$$d) \quad E[Y] = \sum_{y=0}^{N-1} y P(Y=y) = \sum_{y=0}^{N-1} y \sum_{n=y}^{N-1} P(Y=y|X=n)P(X=n)$$

$$= \sum_{y=0}^{N-1} \sum_{n=y}^{N-1} y P(Y=y|X=n) \frac{1}{N}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{y=0}^n y P(Y=y|X=n)$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} E[Y|X=n]$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{n}{5} = \frac{1}{5N} \sum_{n=0}^{N-1} n = \frac{1}{5N} \frac{N-1}{2} \cdot N$$

$$= \frac{N-1}{10}$$

1 2 3 4 5 6

Exercice 6

1) $U \sim \text{Unif}(1, \dots, n)$

$$\begin{aligned} P(V=1) &= \sum_{k=1}^n P(V=1|U=k) P(U=k) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{n^2} \cdot 1+n \cdot \frac{n}{2} = \frac{1+n}{2n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(V=0) &= \sum_{k=1}^n P(V=0|U=k) P(U=k) \\ &= \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{n}\right) \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{n-k}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n n-k \\ &= \frac{1}{n^2} (n-1) \cdot \frac{n}{2} = \frac{n-1}{2n} \end{aligned}$$

$$E[V] = \frac{1+n}{2n}$$

Donc V suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{n+1}{2n}$

2) $X \sim \text{Unif}(\{1, \dots, n\})$ $P(X=x) = \frac{1}{n}$

$$Y \sim \text{Unif}(\{1, \dots, X\})$$

$$P(Y=y|X=x) = \frac{1}{x}$$

$$\begin{aligned} P(Y=y) &= \sum_{k=1}^n P(Y=y|X=k) P(X=k) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \end{aligned}$$

$$E[E[Y|X]]$$

$$E[Y|X=k] = \sum_{i=1}^k i P(Y=i|X=k) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k i = \frac{1}{k} \frac{k+1}{2} = \frac{k+1}{2k}$$

$$\begin{aligned} E[E[Y|X=k]] &= \sum_{k=1}^n \frac{k+1}{2k} P(X=k) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} + \frac{1}{2} k \\ &= \frac{n}{2n} + \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n k = \frac{n}{2n} + \frac{1}{2n} \frac{n+1}{2} \cdot n \\ &= \frac{1}{2} + \frac{n+1}{4} = \frac{n+3}{4} \end{aligned}$$

$$3) \quad X \sim \mathcal{P}(\lambda)$$

$$P(Y=i | X=x) = \binom{x}{i} p^i (1-p)^{x-i}$$

$$P(X=x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$$

$$\begin{aligned} P(Y=i) &= \sum_{x \in X(X)} P(Y=i | X=x) P(X=x) \\ &= \sum_x \binom{x}{i} p^i (1-p)^{x-i} \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \\ &= \sum_x \frac{x!}{i!(x-i)!} p^i (1-p)^{x-i} \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \\ &= \sum_x \frac{p^i}{i!} \frac{(1-p)^{x-i}}{(x-i)!} \lambda^x e^{-\lambda} \\ &= e^{-\lambda} \frac{p^i}{i!} \sum_j \frac{(1-p)^j}{j!} \lambda^{j+i} \quad j = x-i \\ &= e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^i}{i!} \sum_j \frac{((1-p)\lambda)^j}{j!} \\ &= e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^i}{i!} e^{\lambda} e^{-p\lambda} = e^{-(p\lambda)} \frac{(p\lambda)^i}{i!} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } Y \sim \mathcal{P}(p\lambda)$$

Exercice 11

1) X - v.a qui donne nombre d'erreurs

On a n expériences d'envoyer 1 bits

avec succès avec probas 0.05 ou échec avec probas 0.95

Donc $X \sim \mathcal{B}(n, 0.05)$

si $n=3$

$$\begin{aligned} P(X \leq 1) &= P(X=0) + P(X=1) = \binom{3}{0} \left(\frac{1}{20}\right)^0 \left(\frac{19}{20}\right)^3 + \binom{3}{1} \frac{1}{20} \cdot \left(\frac{19}{20}\right)^2 \\ &= \left(\frac{19}{20}\right)^3 + 3 \cdot \frac{1}{20} \cdot \left(\frac{19}{20}\right)^2 \\ &= \left(\frac{19}{20}\right)^2 \left(\frac{19}{20} + \frac{3}{20}\right) \\ &= \left(\frac{19}{20}\right)^2 \left(\frac{22}{20}\right) = 0.99 \end{aligned}$$

2) Z - une v.a qui donne le bit à envoyer

0 ou 1
 0 avec probas $\frac{1}{10000}$ (succès)
 1 avec probas $1 - \frac{1}{10000}$ (échec)

Donc $Z \sim \mathcal{B}(\frac{1}{10000})$

$$\mathcal{Z} = \{0, 1\} \quad P(\{0\}) = \frac{1}{10000}$$

$$P(\{1\}) = \frac{9999}{10000}$$

3)

$$Y = (1-Z)(n-X) + ZX$$

$$P(Y=k) = P(Y=k|Z=0)P(Z=0) + P(Y=k|Z=1)P(Z=1)$$

$$= P(n-X=k) \frac{1}{10000} + P(X=k) \left(1 - \frac{1}{10000}\right)$$

$$= P(X=n-k) \frac{1}{10000} + P(X=k) \left(1 - \frac{1}{10000}\right) = P(X=k) + \frac{P(X=n-k) - P(X=k)}{10^4}$$

$$\binom{n}{n-k} \left(\frac{1}{20}\right)^{n-k} \left(\frac{19}{20}\right)^k \frac{1}{10000} + \binom{n}{k} \left(\frac{1}{20}\right)^k \left(\frac{19}{20}\right)^{n-k} \left(1 - \frac{1}{10000}\right)$$

$$\binom{n}{k}$$

4) $P(Z=1 | Y=3) = \frac{P(Y=3|Z=1)P(Z=1)}{P(Y=3)}$

$$= \frac{P(X=3)P(Z=1)}{P(Y=3)} \approx P(Z=1) = 1 - \frac{1}{10^4} \approx 99.99\%$$

$$= \frac{\binom{13}{3} \left(\frac{1}{20}\right)^3 \frac{1}{10000}}{\binom{13}{3} \left(\frac{1}{20}\right)^3 \frac{1}{10000} + \binom{13}{3} \left(\frac{1}{20}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{10000}\right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{20^3} \cdot \frac{1}{10000}}{\frac{1}{20^3} \cdot \frac{1}{10000} + \frac{1}{20^3} \left(1 - \frac{1}{10000}\right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{20^3} \cdot \frac{1}{10000}}{\frac{1}{20^3} \left(\frac{1}{10000} + 1 - \frac{1}{10000}\right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{20^3} \cdot \frac{1}{10000}}{\frac{1}{20^3} (1)}$$

$$= \frac{1}{10^4 - 1 + 10000}$$

5]

$$P(Z=0 | Y=n) \geq 95\%$$

$$n-X=n$$

$$P(Z=0 | Y=n) = \frac{P(Y=n | Z=0)P(Z=0)}{P(Y=n)} = \frac{P(X=0)P(Z=0)}{P(Y=n)}$$

$$= \frac{P(X=0)P(Z=0)}{P(X=n) + \frac{P(X=0) - P(X=n)}{10^4}}$$

$$= \frac{P(X=0)}{10^4 P(X=n) + P(X=0) - P(X=n)} = \frac{P(X=0)}{P(X=n)(10^4 - 1) + P(X=0)}$$

$$= \frac{\binom{n}{0} \left(\frac{13}{20}\right)^n}{\binom{n}{n} \left(\frac{1}{20}\right)^n (10^4 - 1) + \left(\frac{13}{20}\right)^n}$$

$$= \frac{\left(\frac{13}{20}\right)^n}{\left(\frac{1}{20}\right)^n (10^4 - 1) + \left(\frac{13}{20}\right)^n}$$

$$= \frac{13^n}{10^4 - 1 + 13^n} \geq 0,95$$

$$\Leftrightarrow 13^n \geq (10^4 - 1 + 13^n) 0,95$$

$$\Leftrightarrow 13^n - 0,95 \cdot 13^n \geq (10^4 - 1) 0,95$$

$$\Leftrightarrow 0,05 \cdot 13^n \geq (10^4 - 1) 0,95$$

$$\Leftrightarrow 13^n \geq (10^4 - 1) 19$$

$$\Leftrightarrow 13^n \geq 190000 - 19$$

$$\Leftrightarrow 13^{n-1} \geq 9999$$

$$\Leftrightarrow 1 + \log(13) \geq \log 9999$$

$$\Leftrightarrow n-1 \geq \frac{\log 9999}{\log 13}$$

$$\Leftrightarrow n \geq \log(9999) + 1$$

$$P(Z=1 | Y=n) < 0,05$$

$$\Leftrightarrow \frac{P(X=n) P(Z=1)}{P(Y=n)} < 0,05$$

$$\Leftrightarrow P(Y=n) > 20 P(X=n) \left(1 - \frac{1}{10^4}\right)$$

$$P(X=n) + \frac{P(X=0) - P(X=n)}{10^4} > 20 P(X=n) \left(1 - \frac{1}{10^4}\right)$$

$$\frac{P(X=0) - P(X=n) + 20 P(X=n)}{10^4} > 20 P(X=n) - \frac{20 P(X=n)}{10^4}$$

$$\frac{P(X=0) + 19 P(X=n)}{10^4} > 19 P(X=n)$$

$$\frac{\left(\frac{19}{20}\right)^n + 19 \left(\frac{1}{20}\right)^n}{10^4} > 19 \left(\frac{1}{20}\right)^n$$

$$\frac{1}{10^4} \left(\frac{1}{20}\right)^n (19^{n-1} + 1) > 19 \left(\frac{1}{20}\right)^n$$

$$19^{n-1} + 1 > 10^4$$

$$19^{n-1} > 10^4 + 1$$

$$19^n > 190019$$

$$\Rightarrow n \geq 5$$

Exercice 13

1) $X \sim \text{v.a}$ = nombre de faces avant premier pile

$$X \sim \text{Geom}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$P(X=k) = \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{k-1} \left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

2) $Y = \text{v.a}$ = combien on gagne

$$Y = 5 \cdot 2^X$$

$$E[Y] = E[5 \cdot 2^X] = \sum_{x \in \mathcal{X}(X)} 5 \cdot 2^x \cdot P(X=x) = 5 \sum_x 2^x \left(\frac{1}{2}\right)^x = 5 \sum_x 1 = +\infty$$

3) Oui

Exercise 15

0, 0, 1, 2, 2, 2

$$\frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{15 + 12}{30}$$

	X=0	X=1	X=2	
Y=0	2/30	2/30	6/30	10/30
Y=1	2/30	0	3/30	5/30
Y=2	6/30	3/30	6/30	15/30
	10/30	5/30	15/30	

$$\frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5}$$

$$E[X] = \frac{5}{30} + \frac{30}{30} = \frac{35}{30}$$

$$E[Y] = \frac{5}{30} + \frac{30}{30} = \frac{35}{30}$$

$$E[XY] = \sum x \cdot y \cdot P(X=x \cap Y=y)$$

$$= 2 \cdot \frac{2}{30} + 2 \cdot \frac{2}{30} + 4 \cdot \frac{6}{30}$$

$$= \frac{12 + 12 + 24}{30} = \frac{36}{30}$$

$$\text{Cov}(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = \frac{36}{30} - \left(\frac{35}{30}\right)^2$$

$$= \frac{36 \cdot 30}{30 \cdot 30} - \frac{35 \cdot 35}{30^2}$$

$$= \frac{1080}{30^2} - \frac{1225}{30^2}$$

$$= -\frac{145}{30^2}$$

Non, car si X et Y indép $\text{Cov}(X, Y) = 0$

Exercice 17

$P(X \geq 6)$ i.e. premier 6 fois on a eu échec

$$\text{donc } P(X \geq 6) = (1-p)^6 = (0.7)^6$$

Exercice 18

$X \sim \mathcal{B}(4, 0.42)$ nbre de fois que 6 va être émise

$$E[X] = 4 \cdot 0.42 = 1.68$$

$$P(X=1) = \binom{4}{1} (0.42)^1 (0.58)^3$$

$$P(X=2) = \binom{4}{2} (0.42)^2 (0.58)^2$$

$$\frac{P(X=1)}{P(X=2)} = \frac{\frac{4!}{1!3!} (0.42) (0.58)^3}{\frac{4!}{2!2!} (0.42)^2 (0.58)^2}$$

$$= \frac{4 \cdot 0.58}{6 \cdot 0.42} = \frac{4 \cdot 58}{6 \cdot 42} = \frac{232}{252} < 1$$

Donc $P(X=2)$ est plus grand
et

$$P(X=1) = 6 (0.42)^2 (0.58)^2$$