

Feuille 2

Espaces de probabilités et dénombrement

Avertissement : L'exercice 8 porte sur le « paradoxe » du jeu de Monty Hall et sera vu en TD lors de la deuxième séance consacrée à cette feuille. Avant cette deuxième séance, il est fortement recommandé de faire des simulations sur la page web indiquée à l'exercice 8.

Exercice 1. *Lemme du berger*

Soit $f : X \rightarrow Y$ une application entre deux ensembles.

1. Montrer que $(f^{-1}(\{y\}))_{y \in Y}$ définit une partition de l'ensemble X .
2. Démontrer le résultat suivant :

Lemme du berger. On suppose que Y est un ensemble fini de cardinal p , et que pour tout y dans Y , l'ensemble $f^{-1}(\{y\})$ est de cardinal q . Alors, X est fini, de cardinal pq .

3. Utiliser ce résultat pour montrer par récurrence que le cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble à n éléments est 2^n .

Exercice 2.

On considère l'expérience aléatoire « lancer deux dés équilibrés ».

1. Écrire l'ensemble Ω des résultats possibles comme un produit de deux ensembles puis préciser la mesure de probabilité associée à l'expérience et définie sur Ω .
2. Soit $k \in \mathbb{N}$. Quelle est la probabilité d'obtenir, lorsqu'on lance deux dés, une somme égale à k ? (On pourra distinguer le cas $k \leq 7$ du cas $k \geq 8$.)
3. Donner un nouvel espace de probabilité correspondant à l'expérience du lancer de deux dés lorsqu'on s'intéresse uniquement à la somme des numéros tirés.

Exercice 3. *Problèmes de Galilée*

On considère l'expérience aléatoire « lancer trois dés ».

1. Écrire l'ensemble Ω des résultats possibles comme un produit de trois ensembles puis préciser la mesure de probabilité associée à l'expérience et définie sur Ω .
2. Les trois dés sont identiques, si bien qu'on ne connaît pas leur ordre. Montrer qu'il existe 6 façons différentes d'obtenir une somme égale à 10, et 6 façons aussi pour une somme égale à 9.
3. Montrer qu'il est malgré cela plus probable de faire un lancer ayant une somme égale à 10. Pourquoi?

Exercice 4. *Poteaux et intervalles*

Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{X}_{m,k}$ l'ensemble :

$$\mathcal{X}_{m,k} = \{(r_1, \dots, r_k) \in \mathbb{N}^k, r_1 + \dots + r_k = m\}.$$

On considère l'application f définie sur $\mathcal{X}_{m,k}$ par

$$f(r_1, \dots, r_k) = (\underbrace{0, \dots, 0}_{r_1 \text{ fois}}, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{r_2 \text{ fois}}, 1, 0, \dots, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{r_k \text{ fois}}).$$

Montrer que f est une bijection de $\mathcal{X}_{m,k}$ sur un ensemble que l'on déterminera. En déduire le cardinal de $\mathcal{X}_{m,k}$.

Exercice 5. *File d'attente*

On étudie le nombre de personnes qui séparent deux amis, Pierre et Jean, dans une file d'attente constituée de n personnes au total.

1. Décrire un espace de probabilité associé à cette expérience.
2. Soit $r \in \{1, \dots, n-1\}$. Calculer la probabilité, notée q_r , que les deux amis soient distants de r places (i.e., séparés par $r-1$ personnes).
3. Combien de personnes est-il le plus probable de trouver entre les deux amis ?

Exercice 6A. *Écriture en base 3*

Soit $n \geq 3$.

1. Combien de nombres entiers positifs ont une écriture en base trois constituée de n chiffres ?
2. Parmi ces nombres, on cherche combien contiennent les trois chiffres 0, 1 et 2. On considère donc les ensembles A_0 , A_1 et A_2 , où A_i est l'ensemble des nombres dont l'écriture en base 3 est constitué de n chiffres et comprend le chiffre i .
 - (a) Exprimer en fonction des A_i l'ensemble dont on cherche le cardinal.
 - (b) Calculer $\text{Card}(A_0^c)$, $\text{Card}(A_1^c)$ et $\text{Card}(A_2^c)$.
 - (c) Lorsqu'on considère trois sous-ensembles A , B et C d'un ensemble E , expliquer pourquoi le cardinal de l'union de ces trois ensembles se calcule de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \text{Card}(A \cup B \cup C) &= \text{Card}(A) + \text{Card}(B) + \text{Card}(C) \\ &\quad - \text{Card}(A \cap B) - \text{Card}(A \cap C) - \text{Card}(B \cap C) + \text{Card}(A \cap B \cap C). \end{aligned}$$

- (d) En déduire $\text{Card}(A_0^c \cup A_1^c \cup A_2^c)$.
- (e) Répondre enfin à la question de départ.

Exercice 6B. *Réservations de train*

On considère un train constitué de trois wagons, chaque wagon comportant 50 sièges. Le système de réservation attribue au hasard les places, parmi celles qui sont libres au moment où une personne réserve sa place. Pour ce train, n personnes ont réservé leur place ($0 \leq n \leq 150$).

1. Décrire un ensemble Ω contenant tous les résultats possibles de cette expérience aléatoire (c'est-à-dire l'attribution des n places réservées) et définir la mesure de probabilité P sur Ω qui est associée à cette expérience aléatoire.
On note pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$ l'événement A_i : « toutes les places du i -ème wagon sont réservées ».
2. Quelle est la probabilité que toutes les places du premier wagon soient réservées ?
3. Lorsqu'on considère trois sous-ensembles A , B et C d'un ensemble E , expliquer pourquoi le cardinal de l'union de ces trois ensembles se calcule de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \text{Card}(A \cup B \cup C) &= \text{Card}(A) + \text{Card}(B) + \text{Card}(C) \\ &\quad - \text{Card}(A \cap B) - \text{Card}(A \cap C) - \text{Card}(B \cap C) + \text{Card}(A \cap B \cap C). \end{aligned}$$

4. On note E l'événement « Il y a au moins une place non réservée dans chaque wagon ». Exprimer E et E^c en fonction des événements A_1, A_2, A_3 et des opérations ensemblistes.
5. En déduire $P(E)$.

Indépendance d'événements et probabilité conditionnelle

Exercice 7. *Extrait du partiel de 2018*

1. Soit (Ω, P) un espace de probabilité. On considère trois événements A , B et C . Donner la signification mathématique de : « les événements A , B et C sont indépendants ».
2. Démontrer que si A , B et C sont indépendants, alors A est indépendant de $B \cup C$.
Note : on démontrera bien ce résultat en partant de la définition de l'indépendance (donc, sans utiliser le fait qu'on a énoncé cette propriété dans le cours).
3. On lance deux fois un dé équilibré à 6 faces. On considère les événements I_1 , I_2 et M suivants :
 - I_1 : « le résultat du premier lancer est impair. »
 - I_2 : « le résultat du deuxième lancer est impair. »
 - M : « les résultats des deux lancers sont de même parité. »
 - (a) Calculer la probabilité de chacun de ces trois événements.
 - (b) Décrire en français, le plus simplement possible, les événements $I_1 \cup I_2$ et $(I_1 \cup I_2) \cap M$, puis calculer la probabilité de chacun.
 - (c) Les événements M et $I_1 \cup I_2$ sont-ils indépendants ?
 - (d) Les trois événements I_1 , I_2 et M sont-ils indépendants ?

Exercice 8. *Le Jeu de Monty Hall*

Un jeu télévisé qui fit fureur au États-Unis se déroulait ainsi : un joueur sur le plateau télévisé se trouve devant trois portes fermées. Le joueur gagne une voiture s'il désigne la seule porte derrière laquelle se trouve une voiture. Lorsque le candidat a fait son choix, le présentateur, pour faire durer le suspense, lui ouvre une des autres portes derrière laquelle il n'y a pas de voiture, et lui offre, grand seigneur, la possibilité de refaire son choix. Quel dilemme !

Sur la page web suivante,

<http://sorciersdesalem.math.cnrs.fr/Vulgarisation/Hall/hall.html>

on peut faire des simulations d'un grand nombre d'essais à ce jeu en testant chacune des deux stratégies. Qu'est-ce que ces simulations semblent indiquer ?

Expliquer cela mathématiquement.

Exercice 9.

Une personne dispose de trois cartes identiques en tout point sauf en ce qui concerne la couleur. La première carte est rouge sur les deux faces, la deuxième est blanche sur les deux faces et la troisième est rouge d'un côté et blanche de l'autre.

1. Elle tire au hasard une carte et en présente au hasard une des faces. Vous ne voyez que la face présentée et on vous demande de parier sur la couleur de la face cachée. Quel serait votre choix ?
2. Que se passerait-il si en fait, la personne ne choisit pas au hasard la face de la carte qu'elle présente, mais si elle présente toujours la face de couleur rouge lorsque la carte tirée (toujours au hasard) en possède une ?

Exercice 10. *Un peu de français...*

1. Donner une formulation mathématique de l'affirmation suivante : « un fumeur a plus de chance de développer un cancer du poumon qu'un non fumeur ».

2. Soit A et B deux événements. On suppose que $P(A) > 0$ et $0 < P(B) < 1$.
Montrer que les quatre inégalités : $P(A|B) \geq P(A)$, $P(B|A) \geq P(B)$, $P(A|B^c) \leq P(A)$ et $P(A|B) \geq P(A|B^c)$ sont équivalentes.
3. Énoncer une phrase en français exprimant chacune de ces inégalités.

Exercice 11. *Extrait du partiel de 2018*

On dispose d'un lot de 100 pièces de monnaie toutes de même apparence. On sait que 50 de ces pièces sont équilibrées tandis que les 50 autres sont truquées. Pour une pièce truquée, la probabilité d'apparition de « face » lors d'un jet de cette pièce vaut $3/4$.

On prend une pièce au hasard dans ce lot et on la lance. Quelle est la probabilité d'obtenir « face » ?

Exercice 12. *L'alcootest*

Un laboratoire a mis au point un alcootest dont les propriétés sont les suivantes :

- il se révèle positif pour quelqu'un qui n'est pas en état d'ébriété dans 2% des cas,
- il se révèle positif pour quelqu'un qui est en état d'ébriété dans 96% des cas.

Dans un département donné, on estime que 3% des conducteurs sont en état d'ébriété.

1. Un contrôle dans ce département avec cet alcootest s'est révélé positif. Quelle est la probabilité que le conducteur ne soit pas malgré tout en état d'ébriété ?
2. Si un contrôle se révèle négatif, quelle est la probabilité que le conducteur contrôlé ne soit effectivement pas en état d'ébriété ?

Exercice 13. *Les chaussettes de Pierre*

Pierre a une chaussette mais a égaré la deuxième. Celle-ci a une probabilité p ($p > 0.1$) d'être dans sa commode, qui comporte n tiroirs, et peut être dans n'importe quel tiroir. Pierre décide d'ouvrir k tiroirs ($1 \leq k \leq n$) : s'il trouve sa chaussette, c'est qu'elle était dans la commode ; s'il ne la trouve pas, il en déduit qu'elle n'y est pas. On aimerait connaître le nombre minimum de tiroirs à ouvrir pour que Pierre se trompe avec une probabilité inférieure à 0.1.

1. En posant T l'événement « Pierre se trompe. » et C l'événement « La chaussette est dans la commode. », déterminer $\mathcal{P}(T, k)$ la probabilité de T lorsque Pierre ouvre k tiroirs.
2. Répondre alors à la question.
3. Question subsidiaire : pourquoi avoir supposé que $p > 0.1$?

Exercice 14. *Dystrophie musculaire de Duchenne*

La dystrophie musculaire de Duchenne (DMD) est une maladie due à une mutation récessive liée au sexe, et entraînant un déficit complet de la production de dystrophine. Seuls les hommes porteurs de cette mutation sont atteints, tandis que les femmes sont transmettrices. Les femmes conductrices ont un risque de 50% de transmettre l'allèle muté à leur descendance : les fils d'une femme conductrice ont 50% de risque d'être atteints et les filles d'une femme conductrice ont 50% de risque d'être conductrices. Cependant, le taux de mutation spontanée est élevé : 1/3 des cas de DMD surviennent chez des garçons de mères non porteuses de la mutation.

Il existe un test clinique qui est positif avec probabilité 0.7 si une femme est conductrice et positif avec probabilité 0.1 si elle ne l'est pas.

Nous voulons répondre à la question : Catherine a un garçon, qui est atteint de DMD. Son test est positif. Quelle est la probabilité qu'elle soit conductrice ?

Exercice 15. *Assurance automobile*

Une compagnie d'assurance estime que les gens peuvent être répartis en deux classes ; ceux qui sont enclins aux accidents et ceux qui ne le sont pas. Ses statistiques montrent qu'un individu enclin aux accidents a une probabilité de 0,4 d'en avoir un dans l'espace d'un an ; cette probabilité tombe à 0,2 pour les gens à risque modéré. On suppose que 30% de la population appartient à la classe à haut risque.

1. Quelle est alors la probabilité qu'un nouvel assuré soit victime d'un accident durant l'année qui suit la signature de son contrat ?
2. Un nouveau signataire a un accident dans l'année qui suit la signature de son contrat. Quelle est la probabilité qu'il fasse partie de la classe à haut risque ?
3. En supposant que le fait qu'une personne ait un accident ne modifie pas sa façon d'agir, quelle est la probabilité qu'un individu ayant eu un accident dans l'année qui suit la signature de son contrat ait aussi un accident la deuxième année (on explicitera et commentera les hypothèses utilisées) ?

Exercice 16. *Extrait du partiel de 2017*

Un accident a eu lieu dans la nuit : un taxi a renversé un piéton. Mais le taxi a disparu sans laisser de traces.

Le commissaire Locard enquête pour essayer d'identifier ce taxi. Il sait qu'il n'y a que deux compagnies de taxis dans la ville : les taxis rouges et les taxis jaunes. Et il y a cinq fois plus de taxis jaunes que de taxis rouges. Le commissaire dispose aussi d'un témoin, Élodie, qui a vu la scène. Malheureusement, il sait que les témoins ne sont pas parfaitement fiables (il estime qu'ils se trompent une fois sur cinq).

1. Traduire cet énoncé de manière probabiliste.
2. Quelle est la probabilité pour qu'Élodie affirme avoir vu un taxi rouge ?
3. Élodie témoigne. Elle affirme avoir vu un taxi rouge. Quelle est la probabilité pour que le taxi impliqué dans l'accident soit un taxi rouge ? Le commissaire Locard doit-il tout de suite contacter la compagnie des taxis rouges ?

Suite à un appel à témoins, Nicolas se présente à la police : lui aussi a vu la scène. Le commissaire Locard l'isole soigneusement d'Élodie pour qu'ils ne puissent pas discuter ensemble de ce qu'ils ont vu. « Je préfère avoir des témoignages indépendants », dit-il.

4. Expliquer ce que signifie mathématiquement cette phrase prononcée par le commissaire Locard.
5. Les événements « Élodie affirme avoir vu un taxi rouge » et « Nicolas affirme avoir vu un taxi rouge » sont-ils indépendants ? (*Justifier soigneusement la réponse.*)
6. Du point de vue du commissaire Locard, qui connaît le témoignage d'Élodie, quelle est la probabilité pour que Nicolas affirme avoir vu un taxi rouge ?
7. Nicolas affirme avoir vu un taxi rouge. Quelle est la probabilité pour que le taxi impliqué dans l'accident soit rouge ? Que conseilleriez-vous maintenant au commissaire Locard ?

Exercice 17. *Extrait d'un test de 2023*

On fait deux lancers de deux dés (équilibrés à 6 faces).

1. Dire quel univers Ω et quelle mesure de probabilité P on prend.
2. En fait on joue à un jeu où on dispose de deux essais pour essayer de faire un double.

- (a) Calculer, en utilisant P , la probabilité de faire un double dès le premier lancer.
- (b) Quelle est la probabilité de gagner au second lancer sachant qu'on a raté au premier lancer ?
- (c) En déduire la probabilité totale de gagner (en un ou deux coups).

Pour s'exercer

Vous trouverez d'autres variantes de ces exercices dans les deuxièmes et troisièmes feuilles WIMS.

Exercice 18.

Soient E et F deux ensembles finis tels que $\text{Card}(E) < \text{Card}(F)$. Une application de E dans F peut-elle être injective ? surjective ? bijective ?

Exercice 19. *Cardinal d'un ensemble classique*

Quel est le cardinal de l'ensemble $\{-2, 4, 6, 9\}^3 \times \{0, 2, 7, 9, 12\}^6$?

Exercice 20. *Bus et conducteurs*

On dispose de 3 bus, 3 conducteurs et 3 contrôleurs. Combien de façons y a-t-il d'attribuer les conducteurs et contrôleurs aux bus de manière à ce que chaque bus ait un conducteur et un contrôleur ?

Exercice 21. *Combinatoire : couples*

Combien de possibilités y a-t-il pour former 3 couples à partir de 6 hommes et 4 femmes ?

Exercice 22. *Combinatoire : mots*

Combien de mots distincts peut-on former avec les 9 premières lettres de l'alphabet, sachant que chaque lettre est utilisée exactement une fois dans chaque mot et que les 2 premières lettres $\{A, B\}$ doivent être groupées dans chaque mot ?

Exercice 23. *Combinatoire : salle informatique*

Une école a une salle informatique avec 8 ordinateurs numérotés. Un groupe de 4 élèves fait un cours dans cette salle. Combien de façons différentes y a-t-il d'attribuer chaque élève à un ordinateur (distinct) ?

Exercice 24. *Traduction probabiliste*

On dispose d'un test médical servant à détecter une maladie m . On effectue le test sur une personne. On note

- A l'événement la personne a la maladie m ,
- B l'événement le test est positif.

Exprimer mathématiquement la probabilité que le test soit positif pour une personne malade.

Exercice 25. *Manipulation des probabilités conditionnelles*

Sur un espace de probabilité (Ω, P) , on s'intéresse à deux événements A et B qui ont une probabilité strictement comprise entre 0 et 1 d'être réalisés. On suppose connus $p = P(A)$, $q = P(B|A)$ et $r = P(B|A^c)$.

Donner l'expression de $P(A \cap B^c)$ en fonction de p , q et r .

Exercice 26. *Calculs avec des événements indépendants*

On suppose que A , B et C sont des événements indépendants de probabilité respectivement a , b et c . Exprimer en fonction de a , b et c la probabilité de l'événement $F = A \cup (B^c \cap C^c)$.