



Exos: 5, 8

Exercice 5

1] $\Omega = \{(i, j) \mid 1 \leq i < j \leq n\}$

μ mesure de proba uniforme

$$\text{Card } \Omega = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\forall (i, j) \in \Omega \quad \mu((i, j)) = \frac{2}{n(n-1)}$$

2] Soit $z \in \{1, \dots, n-1\}$

Notons A_z l'événement = "les z amis sont séparés par $z-1$ personnes"

$$A_z = \{(i, j) \in \Omega \mid j - i = z\} = \{(1, z+1), (2, z+2), \dots, (n-z, n)\}$$

$$P(A_z) = \frac{\text{Card } A_z}{\text{Card } \Omega} \quad \text{car équiprobabilité}$$

$$= \frac{n-z}{\frac{n(n-1)}{2}} = \frac{2(n-z)}{n(n-1)}$$

3] $P(A_z)$ est une fonction décroissante de $z \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$

$P(A_z)$ est maximum pour $z=1$

le plus probable est que Pierre et Jean soient l'un derrière l'autre.

Exercice 12

A_1 = "faux positif" - 2%

A_2 = "vrai positif" - 96%

B = "en état d'ébriété" - 3%

Ω = "tous les conducteurs" - 100%

Formule des probas totales:

si $(A_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ partition de Ω

$$\text{alors } P(B) = \sum_{i=1}^n P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i) P(B|A_i)$$

$$P(B) = P(A) \cdot P(B|A) + P(\bar{A}) \cdot P(B|\bar{A})$$

1.

E = "personne est ivre"

$P(T|\bar{E}) = 0.02$

T = "le test est positif"

$P(T|E) = 0.96$

$P(\bar{E}) = 0.03$

2. $P(\bar{E}|T) = \frac{P(\bar{E})P(T|\bar{E})}{P(T)}$ par Bayes $P(T) = P(E)P(T|E) + P(\bar{E})P(T|\bar{E})$

$$= \frac{(1-P(E))P(T|\bar{E})}{P(E)P(T|E) + P(\bar{E})P(T|\bar{E})} = \frac{0.97 \cdot 0.02}{0.03 \cdot 0.96 + 0.97 \cdot 0.02} = \frac{0.0194}{0.0288 + 0.0194} = \frac{0.0194}{0.0482}$$

$P(T) = 0.0482$

≈ 0.4

$$\begin{aligned}
 2. \quad P(\bar{E}|\bar{T}) &= \frac{P(\bar{E}) \cdot P(\bar{T}|\bar{E})}{P(\bar{T})} && \text{par Bayes} && P(T) = 0,0482 \\
 &= \frac{(1-P(E))(1-P(T|E))}{(1-P(T))} && && P(\bar{T}) = 0,9518 \\
 &= \frac{0,97 \cdot 0,97}{0,9518} = 0,998 && && P(\bar{E}) = 0,97
 \end{aligned}$$

Exercice 55

A = "elle a un accident dans l'année"
 E = "elle est enclin aux accident"

On suppose

$$\begin{aligned}
 P(A|E) &= 0,4 && = P(B|E) \\
 P(A|\bar{E}) &= 0,2 && = P(B|\bar{E}) \\
 P(E) &= 0,3 \\
 P(\bar{E}) &= 1 - P(E) = 0,7
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1) \quad P(A) &= P(E)P(A|E) + P(\bar{E}) \cdot P(A|\bar{E}) \\
 &= 0,3 \cdot 0,4 + 0,7 \cdot 0,2 \\
 &= 0,12 + 0,14 \\
 P(A) &= 0,26
 \end{aligned}$$

$$2) \quad P(E|A) = \frac{P(E) \cdot P(A|E)}{P(A)} = \frac{0,3 \cdot 0,4}{0,26} = \frac{0,12}{0,26} \approx 0,46$$

3) Notons B la proba d'avoir un accident la 2^{ème} année
 et toujours A la proba d'avoir un accident la 1^{ère} année

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B|E)P(E) + P(A \cap B|\bar{E})P(\bar{E})}{P(A)} \quad \text{probab. totales}$$

On suppose que A et B sont indépendants conditionnellement à E
 $\therefore P(A \cap B|E) = P(A|E) \cdot P(B|E) = (0,4)^2 = 0,16$ (et à $\bar{E}$)
 et $P(A \cap B|\bar{E}) = P(A|\bar{E}) \cdot P(B|\bar{E}) = 0,2^2 = 0,04$

$$P(B|A) = \frac{0,16 \cdot 0,3 + 0,04 \cdot 0,7}{0,26} = \frac{0,048 + 0,028}{0,26} = \frac{0,076}{0,26} = \frac{76}{260} = \frac{19}{65} \approx 0,29$$

