



Exercice 2

$$1) \Omega = \llbracket 1, 6 \rrbracket^2$$

$$P(\omega) = \frac{1}{36}$$

$$2) \begin{array}{ccc} & \begin{matrix} 2 & 3 & 4 \end{matrix} & \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{matrix} (1,1) & (1,2), (2,3) & (1,3), (2,2), (3,1) \end{matrix} & \end{array}$$

$$\text{On pose } X(\omega) = X(\omega_1, \omega_2) = \omega_1 + \omega_2$$

$$\text{Soit } G_k = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = k\}$$

$$\text{Soit } k \leq 7$$

$$\text{Lorsque } k \leq 7 \quad \#G_k = k-1, \text{ d'où } P(G_k) = \frac{k-1}{36}$$

$$\text{Soit } k \geq 8, \text{ alors } \#G_k = 13-k, \text{ d'où } P(G_k) = \frac{13-k}{36}$$

$$3) \Omega' = \{2, \dots, 12\}$$

$$\text{Soit } \Omega' \ni \omega$$

$$P(\omega) = \begin{cases} \frac{k-1}{36} & \text{si } \omega \leq 7 \\ \frac{13-k}{36} & \text{si } \omega \geq 8 \end{cases}$$

Exercice 5

Il y a n personnes indistinguables, dont 2 personnes : P, J
On cherche à trouver le nombre de position de P et J
dans la file d'attente. Il y a n personnes, on étudie
à calculer le nombre de façon de prendre 2 places :

$$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2) : 1 \leq \omega_1 \neq \omega_2 \leq n\}$$

$$P(\omega) = \frac{2}{n(n-1)}$$

2) Soit $z \in \{1, \dots, n-1\}$

$$H_z = \{(i, j) \in \Sigma : j - i = z\} = \{(1, z+1), (2, z+2), \dots, (n-z, n)\}$$

$$\#H_z = n-z$$

$$P(H_z) = \frac{\#H_z}{\#\Sigma} = \frac{2(n-z)}{n(n-1)}$$

3) $P(H_z)$ est décroissante en fonction de z ,
d'où le maximum est en $z=1$,

le plus probable est ce qu'ils sont l'un derrière l'autre.

Exercice 7

1) Soit Σ espace de probabilité est P son mesure
et $A, B, C \subset \Sigma$ indépendantes :

$$\left. \begin{array}{l} P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \\ P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C) \\ P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C) \\ P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{indépendants 2 à 2} \\ \text{indépendants} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \underline{2) P(A \cap (B \cup C))} &= P((A \cap B) \cup (A \cap C)) = P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C) \\ &= P(A) \cdot P(B) + P(A) \cdot P(C) - P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) \\ &= P(A) (P(B) + P(C) - P(B) \cdot P(C)) \\ &= P(A) \cdot P(B \cup C) \end{aligned}$$

donc il sont indépendants

$$3) \Omega = \{1, 6\}^2$$

$$I_1 = \text{"résultat du 1^{er} est impair"} = \{1, 3, 5\} \times \{1, 6\}$$

$$I_2 = \text{"résultat du 2^{ème} est impair"} = \{1, 6\} \times \{1, 3, 5\}$$

$$M = \text{"même parité des résultats"} = \{2, 4, 6\}^2 \cup \{1, 3, 5\}^2$$

$$(a) \# \Omega = 36$$

$$I_1 = 18$$

$$I_2 = 18$$

$$M = 18$$

$$P(I_1) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

$$P(I_2) = \frac{1}{2}$$

$$P(M) = \frac{1}{2}$$

$$(b) I_1 \cup I_2 = \text{"au moins un résultat est impair"}$$

$$(I_1 \cup I_2) \cap M = \text{"les deux résultats sont impairs"} = \{1, 3, 5\}^2$$

$$P(I_1 \cup I_2) = P(I_1) + P(I_2) - P(I_1 \cap I_2)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

car le résultat du 1^{er} n'affecte pas la rés du 2^{ème}

$$P(I_1 \cup I_2 \cap M) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

$$(c) P(M) = \frac{1}{2} \quad P(I_1 \cup I_2) = \frac{3}{4}$$

$$P(M)P(I_1 \cup I_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8} \neq P(M \cap (I_1 \cup I_2)) = \frac{1}{4}$$

D'où M et $I_1 \cup I_2$ ne sont pas indépendants.

d) D'après 2) si A, B, C sont indépendants, donc

A et $B \cup C$ sont indépendants,

nous avons montré qu'ils ne sont pas indépendants, d'où M, I_1, I_2 peuvent être indep. seulement 2 à 2.

$$I_1 \cap I_2 = \{1, 3, 5\}^2$$

$$\#(\text{---}) = 9 \quad P(\text{---}) = \frac{1}{9}$$

$$P(I_1) \cdot P(I_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = P(I_1 \cap I_2)$$

$$I_1 \cap M = \{1, 3, 5\}^2 \rightarrow \#(\text{---}) = 9 \quad P(\text{---}) = \frac{1}{9}$$

$$P(I_1) \cdot P(M) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = P(I_1 \cap M)$$

Idem avec $I_1 \cap M$

D'où I_1, I_2, M sont 2 à 2 distincts.

Exercice 12

$\bar{E}$ = "personne en état d'ébriété"

A = "test est positif"

$$P(A|E^c) = \frac{2}{100}$$

$$P(A|E) = \frac{96}{100}$$

$$P(E) = \frac{3}{100} \Rightarrow P(E^c) = \frac{97}{100}$$

$$1) P(A) = P(E)P(A|E) + P(E^c)P(A|E^c)$$

$$= \frac{3}{100} \cdot \frac{96}{100} + \frac{97}{100} \cdot \frac{2}{100}$$

$$= \frac{288 + 194}{10000} = \frac{482}{10000} = 0,0482$$

$$P(E^c|A) = \frac{P(A|E^c) \cdot P(E^c)}{P(A)} = \frac{\frac{194}{10000}}{\frac{482}{10000}} = \frac{194}{482}$$

$$2) P(E^c|A^c) = \frac{P(E^c) - P(A)P(E^c|A)}{P(A^c)} = \frac{\frac{97}{100} - \frac{482}{10000} \cdot \frac{194}{482}}{\frac{9518}{10000}} = 0,958$$

$$P(E^c) = P(A) \cdot P(E^c|A) + P(A^c) \cdot P(E^c|A^c)$$

Exercice 15

$I =$ "sont inclinés"

$A =$ "accident pendant un an"

$$P(A|I) = 0,4$$

$$P(A|I^c) = 0,2$$

$$P(I) = 0,3$$

$$\begin{aligned} 1) \quad P(A) &= P(I) \cdot P(A|I) + P(I^c) \cdot P(A|I^c) \\ &= 0,3 \cdot 0,4 + 0,7 \cdot 0,2 \\ &= 0,12 + 0,14 = 0,26 \end{aligned}$$

$$2) \quad P(I|A) = \frac{P(A|I) \cdot P(I)}{P(A)} = \frac{0,4 \cdot 0,3}{0,26} = \frac{\frac{12}{100}}{\frac{26}{100}} = \frac{12}{26} = \frac{6}{13} \approx 0,46$$

3) On note $B =$ "accident 2^{ème} année"

On suppose que A et B sont indépendants cond. à I

$$\begin{aligned} P(B|A) &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B|I)P(I) + P(A \cap B|I^c) \cdot P(I^c)}{P(A)} \\ &= \frac{P(A|I)P(B|I)P(I) + P(A|I^c)P(B|I^c) \cdot P(I^c)}{P(A)} \\ &= \frac{(0,4)^2 \cdot 0,3 + (0,2)^2 \cdot 0,7}{0,26} \approx 0,29 \\ &= \frac{13}{45} \end{aligned}$$