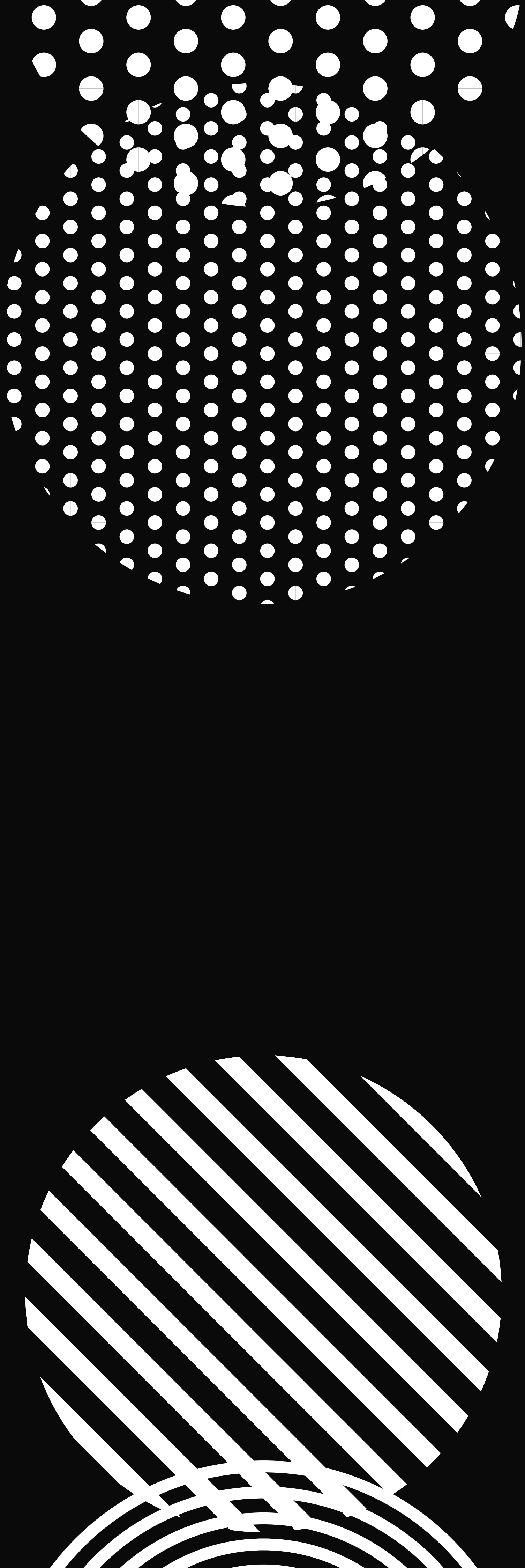
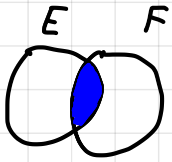


Exercice 1

1) $E\cap F \subset E \subset E\cup F$

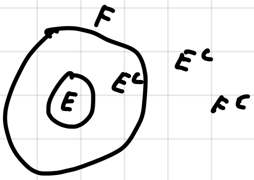


$E\cap F = \{x : x\in E \wedge x\in F$

$\forall x\in E\cap F,\ x\in E$

Donc $E\cap F\subset E$

$E\cup F = \{x : x\in E \vee x\in F\}$



Donc $E\subset E\cup F$

2) $E\subset F \Leftrightarrow \forall x, (x\in E \Rightarrow x\in F)$

$F^c = \{x : x\in\Omega \wedge x\notin F\}$

$E^c = \{x : x\in\Omega \wedge x\notin E\}$

$x\in E \Rightarrow x\in F$

$x\in F^c \Rightarrow x\notin F$

$x\notin E \Rightarrow x\in E^c$

$(x\notin F \Rightarrow x\notin E)$

$x\notin F \Rightarrow x\in F^c \Rightarrow x\in E^c$

Donc $E\subset F \Rightarrow F^c\subset E^c$

3) $F\setminus E = F\cap E^c$

$F\setminus E = \{x : x\in F \wedge x\notin E\}$

$E^c = \{x : x\notin E\}$

$F\cap E^c = \{x : x\in F \wedge x\in E^c\} = \{x : x\in F \wedge x\notin E\} = F\setminus E$

4) $F = (F\cap E)\cup(F\cap E^c)$

$F\cap E = \{x : x\in F \wedge x\in E\}$

$F\cap E^c = \{x : x\in F \wedge x\notin E\}$

$(F\cap E)\cup(F\cap E^c) = \{x : (x\in F \wedge x\in E)\wedge(x\in F \wedge x\notin E)\}$

$= \{x : x\in F \wedge x\in E \wedge x\notin E\}$

$= \{x : x\in F\} = F$

5) $(E\cup F)\cap G = (E\cap G)\cup(F\cap G)$

$E\cup F : \{x : x\in E \vee x\in F\}$

$(E\cup F)\cap G = \{x : (x\in E \vee x\in F)\wedge(x\in G)\}$

$= \{x : (x\in E \wedge x\in G)\vee(x\in F \wedge x\in G)\}$

$= (E\cap G)\cup(F\cap G)$

$(E\cap F)\cup G = (E\cup G)\cap(F\cup G)$

$E\cap F = \{x : x\in E \wedge x\in F$

$(E\cap F)\cup G = \{x : (x\in E \wedge x\in F)\vee(x\in G)\}$

$= \{x : (x\in E \vee x\in G)\wedge(x\in F\vee x\in G)\}$

$= (E\cup G)\cap(F\cup G)$

Exo 2

$1_A(m) = \begin{cases}1 & \text{si } m\in A\\ 0 & \text{si } m\notin A\end{cases}$

$1_B(m) = \begin{cases}1 & \text{si } m\in B\\ 0 & \text{si } m\in B\end{cases}$

$1_A(m) = 1_B(m) = 1 \iff m\in A \wedge m\in B$

$1_A(m) = 1_B(m) = 0 \iff m\notin A \wedge m\notin B$

$1_A(m) < 1_B(m) \iff m\notin A \wedge m\in B$

Alors, on a :

$(m\in A\wedge m\in B)\vee(m\notin A\wedge m\notin B)\vee(m\notin A\wedge m\in B)$

$\iff m\in A \Rightarrow m\in B \wedge m\notin B \Rightarrow m\notin A$

Donc $A\subset B$

Si $\forall m\in\Omega$, $1_A(m) = 1_B(m)$

$m\notin A \iff m\notin B$

$m\in A \iff m\in B$

Donc $A = B$

L'autre façon de montrer.

On vient de montrer que

si $1_A \le 1_B$, cela implique que $A\subset B$

$1_A = 1_B \iff 1_A\le 1_B \wedge 1_B\le 1_A$

$1_B\le 1_A \Rightarrow B\subset A$

Donc $B\subset A \wedge A\subset B \iff A = B$

2) $1_{A^c} = 1 - 1_A$

$1_{A\cap B} = 1_A\cdot 1_B$

	in A	in B	in A et in B	no
1_A	1	0	1	0
1_B	0	1	1	0
$1_{A\cap B}$	0	0	1	0

$1_{A\times B} = 1_A\cdot 1_B$

Exercice 3

1) $i \in \{0, 1, 2\}$

$A_i = \{3j + i : j \in \mathbb{N}\}$ Montrer que $A_0 \oplus A_1 \oplus A_2 = \mathbb{N}$

$A_0 = \{3j : j \in \mathbb{N}\}$
$A_1 = \{3j + 1 : j \in \mathbb{N}\}$
$A_2 = \{3j + 2 : j \in \mathbb{N}\}$

Montrons que A_0, A_1, A_2 ont l'ensemble vide comme intersection

$A_0 \cap A_1 \iff 3j = 3j + 1 \quad \forall j \in \mathbb{N}$
$\iff 0 = 1 \iff$ faux
Donc $A_0 \cap A_1 = \emptyset$

$A_0 \cap A_2 \iff 3j = 3j + 2 \quad \forall j \in \mathbb{N}$
$\iff 0 = 2 \iff$ faux
Donc $A_0 \cap A_2 = \emptyset$

$A_1 \cap A_2 \iff 3j + 1 = 3j + 2 \quad \forall j \in \mathbb{N}$
$\iff 1 = 2 \iff$ faux
Donc $A_1 \cap A_2 = \emptyset$

Alors, il nous reste à montrer que $A_0 \cup A_1 \cup A_2 = \mathbb{N}$

$A_0 \cup A_1 \cup A_2 = \{3j \vee 3j + 1 \vee 3j + 2 : j \in \mathbb{N}\}$

Montrons que $\forall x \in \mathbb{N}$, $x \in A_0 \cup A_1 \cup A_2$

Tout nombre naturel $n \in \mathbb{N}$ peut s'écrire comm

$n = 3q + r$ où $q \in \mathbb{N}$, $r \in \{0, 1, 2\}$
si $r = 0$ donc $n \in A_0$
si $r = 1$ donc $n \in A_1$
si $r = 2$ donc $n \in A_2$
Par conséquent $\mathbb{N} = A_0 \cup A_1 \cup A_2$