



Exercice 2

1)

\Rightarrow) Supposons $I_A \leq I_B$ Montrons que $A \subset B$
 Soit $x \in A$

Par hypothèse $I_A(x) \leq I_B(x)$

Or $x \in A$, donc $I_A(x) = 1$

d'où $1 \leq I_B(x)$ avec $I_B(x) \in \{0, 1\}$

Donc $I_B(x) = 1$ i.e. $x \in B$

\Leftarrow) Supposons $A \subset B$. Montrons $I_A \leq I_B$
 Soit $x \in \Omega$ But: Montrez que $I_A(x) \leq I_B(x)$

1 cas: $x \in A$ alors $x \in B$ puisque $A \subset B$

Donc $I_A(x) = I_B(x) = 1$, on obtient $I_A(x) \leq I_B(x)$

2 cas: $x \notin A$ alors $I_A(x) = 0$ $I_B(x) \in \{0, 1\}$ donc $I_A(x) \leq I_B(x)$

Conclusion: $I_A \leq I_B$

$$I_A = I_B$$

$$\Leftrightarrow I_A \leq I_B \wedge I_B \leq I_A$$

$$\Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$$

$$\Leftrightarrow A = B$$

2) $I_{A^c} = 1 - I_A$ Soit $x \in \Omega$ \odot 1 cas: $x \in A$ $0 = 1 - 1$

$$\odot$$
 2 cas: $x \notin A$ $1 = 1 - 0$

$$I_{A \cap B} = I_A I_B$$

$$I_{A \times B} = I_A I_B$$

$$I_{A \times B}(x, y) = 1 \Leftrightarrow x \in A \text{ et } y \in B$$

$$A \times B \subset \Omega \times \Omega$$

$$(x, y) \in \Omega \times \Omega$$

3) On suppose $A, B \subset \Omega$ et $A \cap B = \emptyset$

$$I_{A \cup B} = I_A + I_B$$

4) On suppose $A, B \subset \Omega$

$A \sqcup B$ désigne $A \cup B$
lorsque $A \cap B = \emptyset$

$A \cup B = \underbrace{A \cup B \setminus A}$ une partition de $A \cup B$

$$B \setminus A = B \cap A^c \quad I_{B \cap A^c} = I_B \cdot I_{A^c} = I_B \cdot (1 - I_A)$$

$$I_{A \cup B} = I_A + I_{B \setminus A} = I_A + I_B(1 - I_A) \\ = I_A + I_B - I_A I_B$$

5) $E \xrightarrow{f} \Omega \xrightarrow{I_A} \{0, 1\}$

$$I_A \circ f = I_B$$

avec $B = \{x \in E, I_A \circ f(x) = 1\}$

$$= \{x \in E: f(x) \in A\}$$

$= f^{-1}(A)$ image réciproque de A
par f

Soit $\varphi: E \rightarrow \{0, 1\}$

$\varphi = I_A$ avec $A = \{x \in E, \varphi(x) = 1\}$

$$I_A = I_B \Leftrightarrow A = B$$

$$\mathcal{P}(E) \rightarrow \{0, 1\}^E = \{ \text{fonctions } E \rightarrow \{0, 1\} \}$$

$$A \mapsto I_A$$

bijection

$$\text{Card } \mathcal{P}(E) = 2^{\text{Card } E} \\ \text{si } E \text{ fini}$$

6) Soit $\{A_i\}_{1 \leq i \leq n}$ une partition de A
i.e

$$A = \bigcup_{1 \leq i \leq n} A_i = A_1 \cup \dots \cup A_n \quad \text{et } A_i \cap A_j = \emptyset \quad A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall 1 \leq i < j \leq n$$

$$\text{Montrons que } I_A = \sum_{i=1}^n I_{A_i}$$

Soit $x \in \Omega$

$\circ x \in A \Rightarrow x \in A_i$ et $\forall i \neq j, x \notin A_j$

Donc $I_{A_i}(x) = 1$

$\forall i \neq j, I_{A_j}(x) = 0$

$$\text{Donc } \sum_{i=1}^n I_{A_i}(x) = I_A(x)$$

$\forall x \in A$ Alors $\forall i \in \{1, \dots, n\}, I_{A_i}(x) = 0$
 Donc $\sum_{i=1}^n I_{A_i}(x) = 0 = I_A(x)$

$$\text{CCL: } \sum_{i=1}^n I_{A_i} = I_A$$

Partition de A

$(A_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ partition de A ($A_i \subset A$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset \\ \bigcup_{i=1}^n A_i = A \\ \forall i \in \{1, \dots, n\} A_i \neq \emptyset \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall a \in A \exists! i \in \{1, \dots, n\} a \in A_i \\ \forall i \in \{1, \dots, n\} A_i \neq \emptyset \end{cases}$$

Déf: Soient $x_1, \dots, x_{10} \in \mathbb{Z}$

Montrer qu'il existe $a_1, \dots, a_{10} \in \{-1, 0, 1\}$
 tels que $\sum_{i=1}^{10} a_i x_i$ soit divisible par 100

Exercice 4 Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$1. \underbrace{\{P, F\} \times \{P, F\} \times \dots \times \{P, F\}}_{n \text{ fois}}$$

Notons 0 représente Pile et 1 - Face

$$\Omega = \{0, 1\}^n$$

Événement élémentaire: élément $\omega \in \Omega$. $[\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$
 avec $\omega_i = 0 \Leftrightarrow$ le $i^{\text{ème}}$ lancer donne Face

$$2. F = \{(\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega \mid \omega_2 = \omega_1 = 1\}$$

$$= \{(1, 1, \omega_3, \dots, \omega_n) \in \Omega\}$$

Événement = partie de Ω

3. Soit $i_0 \in \{1, \dots, n\}$

$$E_{i_0} = \{(\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega \mid \omega_{i_0} = 0\}$$

4. $F = (E_1 \cup E_2)^c$ car $E_1 \cup E_2$ est l'événement:
"avoir pile au 1^{er} lancer ou au 2^{ème} lancer"

$$F = E_1^c \cap E_2^c$$

5. $G =$ "au moins une fois pile"

$$G^c = \text{"zero fois pile"} = \text{"toujours face"}$$

$$= E_1^c \cap E_2^c \cap \dots \cap E_n^c$$

car $E_i^c =$ "face au i^{ème} lancer"

$$G = (G^c)^c = (E_1^c \cap \dots \cap E_n^c)^c = (E_1^c)^c \cup \dots \cup (E_n^c)^c$$

$$= E_1 \cup \dots \cup E_n$$

Autre méthode:

$$G = \{(\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega \mid \exists i \in \{1, \dots, n\} \omega_i = 0\}$$

$$= \{\omega \in \Omega \mid \exists i \in \{1, \dots, n\} \omega \in E_i\}$$

$$= E_1 \cup \dots \cup E_n$$

$$= \text{"pile au 1 lancer"} \text{ ou } \dots \text{ ou "pile au } n \text{ lancer"}$$

Exercice 5

On appelle collection la suite des numéros des images obtenues.

Ex. de collection: (3, 1, 5, 1, 3, 7, 8, 1, 2, 3)

$$1] \Omega = \llbracket 1, N \rrbracket \times \dots \times \llbracket 1, N \rrbracket \\ = \llbracket 1, N \rrbracket^{10}$$

2] E_i : "l'enfant n'a pas l'image numéro i "

$$E_i = \{(\omega_1, \dots, \omega_{10}) \in \Omega \mid \forall j \in \{1, \dots, 10\} \omega_j \neq i\} \\ = (\llbracket 1, 10 \rrbracket \setminus \{i\})^{10}$$

3] $F_{i,j} = \{\omega = (\omega_1, \dots, \omega_{10}) \in \Omega \mid \omega_j = i \text{ et } \forall k \in \llbracket 1, j-1 \rrbracket \omega_k \neq i\}$

$$F_{i,j} = (\llbracket 1, N \rrbracket \setminus \{i\})^{j-1} \times \{i\} \times \llbracket 1, N \rrbracket^{10-j}$$