



Exo 2

Soient $A, B \subset \Omega$

1) Montrer que $I_A \leq I_B \Leftrightarrow A \subset B$

$\Rightarrow$ | hyp: $I_A \leq I_B$

Soit $x \in A$

or $I_A \leq I_B$

$$x \in A \Rightarrow I_A(x) = 1 \leq I_B(x)$$

donc $I_B(x) = 1$ Donc $x \in B$

Soit $x \notin A$ alors $I_A(x) = 0 \leq I_B(x)$, donc $I_B(x) = \{0, 1\}$

$$\Rightarrow I_A(x) \leq I_B(x)$$

Donc $x \in B$ ou $x \notin B$

Donc $I_A \leq I_B \Rightarrow A \subset B$

$\Leftarrow$ | hyp: $A \subset B$

Soit $x \in A$ alors $x \in B$

$$\text{Donc } I_A(x) = 1 = I_B(x)$$

Soit $x \notin A$ alors $x \in B$ ou $x \notin B$

$$\text{Donc } I_A(x) = 0 \text{ et } I_B(x) = \{0, 1\}$$

$$\Rightarrow I_A(x) \leq I_B(x)$$

C.L.L | $I_A \leq I_B$ ssi $A \subset B$

$$I_A \leq I_B \wedge I_B \leq I_A \Leftrightarrow I_A = I_B$$

$$I_B \leq I_A \rightarrow B \subset A$$

$$B \subset A \wedge A \subset B \Rightarrow A = B$$

Donc $A = B$ si $I_A = I_B$

2)

$$A^c = \Omega \setminus A$$

$$I_{A^c} = 1 - I_A$$

$$A \cap B = \{x \in \Omega : x \in A \wedge x \in B\}$$

$$I_{A \cap B} = I_A \cdot I_B$$

$$A \times B = \{(a, b) \in \Omega \times \Omega : a \in A \text{ et } b \in B\}$$

$$I_{A \times B} = I_A \cdot I_B$$

3) ^{hyp} $A \cap B = \emptyset \Rightarrow (x \in A \Rightarrow x \notin B) \wedge (x \in B \Rightarrow x \notin A)$

Donc $I_{A \cup B} = I_A + I_B$

4) $A \subset \Omega, B \subset \Omega$

$$A \cup B = A \cup B \setminus A$$

$$B \setminus A = A^c \cap B$$

$$I_{A^c} = 1 - I_A$$

$$I_{A^c \cap B} = I_{A^c} \cdot I_B = I_B - I_A \cdot I_B$$

$$I_{A \cup B} = I_{A \cup B \setminus A} = I_A + I_B - I_A \cdot I_B \quad | \quad I_A \cdot I_B = I_{A \cap B}$$

! 5) $E \xrightarrow{f} \Omega \xrightarrow{I_A} \{0, 1\}$

$$I_A = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

$$(I_A \circ f)(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } f(x) \in A \\ 0 & \text{si } f(x) \notin A \end{cases} = I_B$$

$$\text{avec } B = \{x \in E \mid f(x) \in A\} \\ = f^{-1}(A)$$

Donc $I_A \circ f$ est une fonction indicatrice de $f^{-1}(A)$

! 6] Soit $\{A_i\}_{1 \leq i \leq n}$ une partition de A

i.e

$$A = \bigcup_{1 \leq i \leq n} A_i$$

$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j \leq n$$

Donc Soit $x \in A$, donc $\exists i \in \{1, \dots, n\} \quad x \in A_i$
 $\forall j \neq i \quad x \notin A_j$

$$\text{donc} \quad I_A(x) = 1 \quad I_{A_i}(x) = 1$$

$$I_{A_j}(x) = 0 \quad \forall j \neq i$$

$$\text{Donc} \quad \sum_{i=1}^n I_{A_i}(x) = 1 = I_A(x)$$

Soit $x \notin A$, donc $I_A(x) = 0$, de plus $\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad I_{A_i}(x) = 0$

$$\text{Donc} \quad \sum_{i=1}^n I_{A_i}(x) = 0 = I_A(x).$$

$$\text{Donc} \quad \sum_{i=1}^n I_{A_i} = I_A$$

Exercice 4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On tire à pile ou face n fois

$$1] \quad \Omega = \{\text{pile}, \text{face}\}^n = \underbrace{\{\text{pile}, \text{face}\} \times \{\text{pile}, \text{face}\} \times \dots \times \{\text{pile}, \text{face}\}}_{n \text{ fois}}$$

$$2] \quad F = \{\text{face}\} \times \{\text{face}\} \times \{\text{pile}, \text{face}\}^{n-2} = \{(\text{face}, \text{face}, \omega_3, \dots, \omega_n) : \omega_i \in \{\text{pile}, \text{face}\} \quad \forall i \in \{3, \dots, n\}\}$$

$$3] \quad i \in \{1, \dots, n\} \quad E_i = \{\text{pile}, \text{face}\}^{i-1} \times \{\text{pile}\} \times \{\text{pile}, \text{face}\}^{n-i}$$

! 4] $E_1 \cap E_2 = \text{"les 2 premiers résultats sont pile"}$

$E_1 \cup E_2 = \text{"pile au premier ou deuxième"}$

$$\text{--- } F = \Omega \setminus E_1 \cap E_2$$

$F = (E_1 \cup E_2)^c = \text{"ni au premier ni au 2ème"}$

! 5] $G = E_i \cup E_j$
 $1 \leq i \neq j \leq n$

Exercice 5

$$\underline{1]} \quad \Sigma = \{(w_1, \dots, w_{10}) : \forall i \in \{1, \dots, 10\} \ w_i \in \llbracket 1, N \rrbracket\} \\ = \llbracket 1, N \rrbracket^{10}$$

$$\underline{2]} \quad E_i = \text{"l'enfant n'a pas image numero } i\text{"} \\ = \{(w_1, \dots, w_{10}) \in \Sigma : \forall j \in \{1, \dots, 10\} \ w_j \neq i\} \\ = (\llbracket 1, N \rrbracket \setminus \{i\})^{10}$$

$$\underline{3]} \quad F_{i,j} = \text{"l'enfant a obtenu l'image n° } i \text{ la } j^{\text{e}} \text{ fois} \\ \text{lorsqu'il a acheté la } j^{\text{e}} \text{ tablette"} \\ = \{(w_1, \dots, w_{10}) \in \Sigma : \forall k < j \ w_k \neq i, \ w_j = i\} \\ = (\llbracket 1, N \rrbracket \setminus \{i\})^{j-1} \times \{i\} \times \llbracket 1, N \rrbracket^{10-j}$$

$$\text{! } \underline{4]} \quad E_i^c = (\text{"l'enfant n'a pas l'image n° } i\text{"})^c \\ = \text{"l'enfant a l'image n° } i\text{"} \\ = \{(w_1, \dots, w_n) \in \Sigma : \exists j \in \{1, \dots, 10\} \ w_j = i\} \\ = F_{i,1} \cup F_{i,2} \cup \dots \cup F_{i,n}$$

$$E_i^c = \bigcup_{1 \leq k \neq l \leq n} F_{i,k} \cup F_{i,l}$$

$$\underline{5]} \quad k \in \{2, \dots, 10\} \\ G_k = \{(w_1, \dots, w_{10}) \in \Sigma : \forall i < k \ w_i \neq w_k\}$$

$$\underline{6]} \quad G_k = \bigcup_{1 \leq i \neq j \leq n} F_{i,k} \cup F_{j,k}$$

$$\underline{7]} \quad \bigcap_{k=2}^{10} G_k \rightarrow \text{toutes les images sont uniques}$$

$$\bigcup_{k=2}^{10} G_k \rightarrow \text{au moins deux images sont distinctes}$$

Exercice 11

1)

Pour la première chiffres une lettre on peut pose l'une des 3 lettres, donc 3 possibilité.

Pour le premiers nombre on peut posez l'un des 9 nombres, 9 possibilité.

Or il n'est pas interdit d'utiliser les même nombres, donc pour les 3 autres nombres on peut utiliser les même nombre. Donc pour chacun nombre qui reste il y a 9 possibilités.

Principe multiplicatif: $3 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 3 \cdot 9^3 = 3 \cdot 3^2 = 3^3$

2) Pour la lettre on a toujours 3 possibilité par contre, pour les nombres on peut pas utiliser "1", donc on ne peut utiliser que 8 nombres: 8 possibilité pour chacun des 4 nombres.

Principe multiplicatif: $3 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 3 \cdot 8^4$ codes possibles

3) ~~Pour une lettre rien ne change, par contre pour un des chiffres on ne peut poser que le nombre "1", donc une seule possibilité, pour les autres 3 nombres: 9 possibilité pour chacun. On peut mettre 1 dans l'un des 4 chiffres, donc + 4 possibilité~~

~~Principe multiplicatif: $4 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 4 \cdot 3 \cdot 9^3 = 3 \cdot 3^5 = 3^7 \cdot 4$~~

4) Pour une lettre rien ne change, par contre pour les nombre: pour le premier nombre, on peut choisir n'importe quel nombre, donc 9 possibilité, pour la deuxième, on peut choisir n'importe quel nombre sauf celui qu'on a choisi pour le premier, donc 8 possibilités, pour le 3^{ème} n'importe quel sauf les nombres qu'on a choisi pour le 1^{er} et 2^{ème}, donc 7 possibilités, pour le 4^{ème} n'importe quel sauf ceux qu'on a choisi pour 1^{er}, 2^{ème} et 3^{ème} nombre, donc 6 possibilités.

Principe multiplicatif: $3 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$ codes.

Dans 1 question on a calculé le nombre de tous les chiffres possibles, dans la deuxième le nombre de chiffres qui contiennent pas "1".

Donc pour calculer les codes qui contiennent "1" au moins 1 fois, on peut prendre tous les codes sauf ceux où il n'y a pas de "1" du tout.

Donc $3(9^4 - 8^4)$

5) Pour une lettre rien ne change.
 Pour chacun de 3 nombres on peut choisir
 n'importe quel nombre, donc 3 possibilités pour chacun.
 Pour 4^{ème}, on peut choisir seulement l'un nombre
 qui est déjà choisi parmi 3 autres, donc 1 possibilité,
 ce nombre on peut poser dans l'un des 4 chiffres, donc
 4 possibilités.
 Principe multiplicatif: $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 4 = 3 \cdot 3 \cdot 3^3$ codes.

Les codes avec au moins 2 chiffres identiques: tous les codes sauf les
 codes où tous les chiffres sont distincts. donc: $3 \cdot 3^4 - 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0 = 3 \cdot 3(3^3 - 2 \cdot 1 \cdot 0)$

Exercice 12

1) Pour tous les cartes, ordre peu importe
 donc C_{32}^5 .

2) Il y a 8 carreaux, donc C_8^5 tirages possibles.
 Il y a 8 piques donc il y a C_8^5 tirages possibles.
 Principe additif: $C_8^5 + C_8^5$

3) Il y a 8 carreaux, donc il y a C_8^2 tirages de 2
 cartes possibles.
 Il y a 3 piques, donc il y a C_3^3 cartes possibles.
 On a deux ensembles: 5^{ème} tirage possibles pour 2
 carreaux, 2^{ème} tirages possibles pour 3 piques. avec
 chaque possibi de tirage de carreaux on peut combiner chaque
 tirage possible de piques. Donc il y a $C_8^2 \cdot C_3^3$ possibls.

4) D'après: le nombre de tous les tirages possibles: C_{32}^5
 On calcule le nombre de tous les tirages où il n'y a pas de roi: C_{28}^5 car il y a 4 cartes roi.
 Au moins 1 roi: tous les tirages — les tirages sans roi.
 Donc $C_{32}^5 - C_{28}^5$

5) Il y a C_{28}^4 possibilités de tirer 4 carte sans roi.

Pour la 5^{ème} carte avec chaque tirage on peut tirer chaque roi, donc il y a $4 \cdot C_{28}^4$ possib^lités $\rightarrow$ pour les tirages où il y a seulement 1 roi. De plus il y a C_{28}^5 possibilités de tirer 5 cartes sans roi.

Donc: il y a $4 \cdot C_{28}^4 + C_{28}^5$ tirages où il y a au plus 1 roi.

6) On gère deux cas: avec roi pique et sans roi pique

Avec roi pique: $1 \cdot C_3^1 \cdot C_7^2 \rightarrow$ tirages de 2 cartes sans roi pique
 $\hookrightarrow$ tirages de roi sans roi pique

donc on a les tirages de 4 cartes où il y a 2 roi et 2 piques, il faut avoir la 5^{ème} qui est ni l'un ni l'autre, donc C_{11}^1 car $32 - 4 - 3$. Les: $C_3^1 \cdot C_2^2 \cdot C_{11}^1$

Sans roi pique: $C_3^2 \cdot C_7^3 \rightarrow$ tirages de 3 carte parmi 3 piques.
 $\hookrightarrow$ tirages de 2 cartes parmi 3 roi

Au totale: $C_{11}^1 C_3^1 \cdot C_7^3 + C_3^2 \cdot C_7^3$

Exercice 13

1 On a $4 + 6 + 3 = 13$ livres. L'ordre est important.

On cherche de trouver le nombre de rangement de 13 livres parmi 13 livres, i.e 13 permutation. Ce nombre est $13!$.

2 Pour les livres de maths: il y a 4 livres, donc il y a 4! possibilités de ranger les livres de maths.
Idem physique: 6!, chimie: 3!

De plus, il y a 3 matière et on peut par exemple poser premièrement les livres de maths, puis physiques, puis chimie, ou: physique, maths, chimie, etc. Finalement, il y a 3 matières, donc il y a $3!$ façon de ranger les groupes de livres de ces matières.

Principe multiplicatif: $4! \cdot 6! \cdot 3! \cdot 3!$

3 D'après 2) il y a 4! façon de ranger les livres de maths. Il reste $(13 - 4) = 9$ livres, donc il y a $9!$ façon de ranger les livres qui reste. De plus, par exemple on peut poser 1 livre quelconque (mais pas maths), puis les livres de maths, puis le reste, ou bien 2, maths, le reste, finalement, il y a 10 façon d'interclure les livres de maths entre 9 autres livres.
Principe multiplicatif:

$$\underline{4! \cdot 9! \cdot 10 = 4! \cdot 10! \text{ façons.}}$$

Exercice 14

Soit E un ensemble à n éléments

D_n le nombre de dérangements (les permutation ne laissant aucun invariant) i.e. chaque élément trouve un nouveau place. On pose $D_0 = 1$.

1. Soit $\text{Card}(E) = 1$ On pose $A = \{ f: E_n \rightarrow E_n, \forall x \in E_n, f(x) \neq x \}$

l'ensemble des bijection entre E_n et E_n où on voit E_n comme un ensemble des position des éléments de E ; $E_n = \{1, \dots, n\}$

Or $\text{card}(E) = 1$, donc $E_1 = \{1\}$ on cherche les bijection $f: E_1 \rightarrow E_1$ tq $\forall x \in E_1, f(x) \neq x$. Il existe une seule bijection $f: \{1\} \rightarrow \{1\}$, mais c'est $f(1) = 1$, donc A est vide. car cette bijection ne respecte pas la règle $f(x) \neq x$
Donc $D_1 = 0$

2] $\text{Card}(E) = 2$, $E_2 = \{1, 2\}$ On cherche les bijection $f: E_2 \rightarrow E_2$. Il existe 2 bijections: $f_1(1) = 1, f_1(2) = 2$
 $f_2(1) = 2, f_2(2) = 1$
Seulement f_2 respecte la règle de A , donc $\text{Card}(A) = 1$
Donc $D_2 = 1$

3] $E = \{a_1, \dots, a_n\}$ On pose $S(E)$ toutes les bijections entre E_n et E_n ou $n = \text{Card}(E)$

On pose $A_k = \{ f \in S(E) : \text{Card} \{ x \in E_n : f(x) = x \} = k \}$
= ensemble de bijections où exactement k éléments sont laissés invariants

Il y a C_n^k façon de choisir k éléments qui seront laissés invariants. Il y a D_{n-k} dérangement de $n-k$ éléments qui sont restés et ils ne seront pas laissés invariants. Principe multiplicatif:

$\binom{n}{k} D_{n-k}$ permutation possibles.

On pose $j = n-k$ On sait que $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
Donc $\binom{n}{k} D_{n-k} = \binom{n}{j} D_j$

$n!$ - le nombre de tous les permutations possibles.

$\binom{n}{0}D_0$ le nombre de permutation où on laisse tous les éléments invariants.

$\binom{n}{1}D_1$ où on laisse tous les éléments sauf 1 invariants

$\binom{n}{2}D_2$ 2

$\vdots$

$\binom{n}{n-1}D_{n-1}$ $n-1$

$\binom{n}{n}D_n$ où on ne laisse aucun élément invariant

La somme de nombre de ces permutation et le nombre de toutes les permutations possibles

$$\text{Donc } n! = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} D_j$$

$$\text{4)} \quad 3! = \binom{3}{0}D_0 + \binom{3}{1}D_1 + \binom{3}{2}D_2 + \binom{3}{3}D_3$$

$$= 1 \cdot 1 + 0 + \frac{3!}{2!1!} \cdot 1 + 1 \cdot D_3$$

$$6 = 1 + 0 + 3 + D_3 \Rightarrow \underline{D_3 = 2}$$

$$4! = \binom{4}{0}D_0 + \binom{4}{1}D_1 + \binom{4}{2}D_2 + \binom{4}{3}D_3 + \binom{4}{4}D_4$$

$$24 = 1 + 0 + \frac{4!}{2!2!} \cdot 1 + \frac{4!}{3!1!} \cdot 2 + D_4$$

$$24 = 1 + 6 + 8 + D_4 \Rightarrow D_4 = 24 - (6 + 8 + 1) = 24 - 15 = 9$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{D_4 = 9}}$$

$$5! = \binom{5}{0}D_0 + \binom{5}{1}D_1 + \binom{5}{2}D_2 + \binom{5}{3}D_3 + \binom{5}{4}D_4 + \binom{5}{5}D_5$$

$$120 = 1 + 0 + 10 \cdot 1 + 10 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + D_5 \Rightarrow D_5 = 120 - (45 + 20 + 15 + 1)$$

$$= 120 - (76) = 44$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{D_5 = 44}}$$

$$\text{Donc } D_3 = 2, D_4 = 9, D_5 = 44$$

5

a) Il y a 5 femmes et 5 hommes

$\begin{matrix} \text{1}^{\text{ere}} \\ \text{2}^{\text{eme}} \\ \vdots \\ \text{5}^{\text{eme}} \end{matrix}$

femme	peut choisir	5 hommes

		4 hommes

		1 homme

Donc il y a $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5!$ associations possibles.

b) D_5 est l'ensemble de permutation où chaque élément et à nouvelle position. On imagine que les hommes ne changent (ne bougent pas) pas de place et c'est les femmes qui bougent et choisissent un homme pour faire un couple. Donc il y a D_5 ^{telles} associations.

Donc la probabilité est: $\frac{D_5}{5!} = \frac{49}{120} = \frac{22}{60} = \frac{11}{30}$

c) Un seul couple légitime soit reconstitué ($\Rightarrow$)
 1 seul élément est laissé invariants et les autres
 ne sont pas laissés invariants, d'après $\exists$ il y a
 $\binom{5}{1} D_4$ de tels associations = $5 \cdot 9 = 45$
 Donc la possibilité: $\frac{45}{120} = \frac{3}{8}$

e) plus de couples illégitimes, que légitimes 3:2, 4:1, 5:0
On a déjà calculé les possibilités pour 4:1 et 5:0
donc il nous reste à calculer 3:2 $\rightarrow$ seulement 2
couples légitimes sont reconstitués : $\binom{5}{3} D_3 = \frac{5!}{3! \cdot 2} \cdot 2 = \frac{5!}{2!} = 5 \cdot 4$
possibilités : $\frac{20}{120} = \frac{1}{6}$

plus de couples illégitimes: 5:0 ou 4:1 ou 3:2

Donc probabilité: $\frac{44}{120} + \frac{45}{120} + \frac{20}{120} = \frac{109}{120}$

Exercice 15

Il y a n bonbons distincts on veut calculer les nombres de façon de répartir les bonbons entre Harry, Hermione et Ron tel que chacun a au moins 1 bon bon.

Au début, on calcule le nombre de toutes les répartition possibles sans contraintes: 3^n car chaque bonbon peut être distribuer à l'un des 3 personnages.

Ensuite, on calcule le nombre de répartition possible, quand un personnage n'a aucun bonbon: 2^n .

il y a 3 personnages, donc $3 \cdot 2^n$, par contre, dans 2^n il y a les cas où entre 2 personnage un reçoit tous les bonbons et l'autre: aucun.

Par ex: "Ron ne reçoit pas de bonbon" et "Harry ne reçoit pas de bonbon" dans chacun des cas on a compté ceux où Ron ne reçoit pas de bonbon, donc

si on calcule $3^n - 3 \cdot 2^n$ on sur-soustrait les cas où 2 personnages ne reçoivent pas de bonbon, donc il faut additionner ces cas. Si seulement 1 personnage reçoit tous les bonbons il y a $1^n = 1$ façon, pour 3 personnages: $3 \cdot 1$

Finalement il y a $3^n - (3 \cdot 2^n) + 3$ façons

Maintenant on a $m \geq 3$ chocograinoilles indistinguables et on compte le nombre de façon de les distribuer parmi 3 personnes où chacun a au moins 1 choco...

On a: $x_1 + x_2 + x_3 = m$ le nombre de solutions, où $x_1 \geq 1, x_2 \geq 1, x_3 \geq 1$

on pose $y_i = x_i - 1 \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}$

donc $y_1 + 1 + y_2 + 1 + y_3 + 1 = m$ où $\forall i \in \{1, 2, 3\} y_i \geq 0$

c'est $y_1 + y_2 + y_3 = m - 3$ On travaille avec $m - 3$ Stars and Bars

où le nombre de façon de distribuer de $m-3$ choco... indistinguables parmi 3 personnes sans contraintes, donc on obtient:

$$\binom{m-3+3-1}{3-1} = \binom{m-1}{2} = \frac{(m-1)!}{2!(m-3)!} = \frac{\overbrace{(m-3)!}^{(m-3)!} (m-2)(m-1)}{2! \overbrace{(m-3)!}^{(m-3)!}}$$

$$= \frac{(m-1)(m-2)}{2} \text{ façons.}$$

Exercice 16

1] Il y a 9 snowboarders et 3 skieurs, donc 12 personnes à chercher à calculer le nombre de façon à les répartir dans 12 places, donc il y a 12! façons

2] Le nombre de façon de s'asseoir dans une siége: 4!
car il ya 4 place, la probabilité que Lila soit assise dans la première siége: $\frac{4!}{12!}$
que Louis: $\frac{4!}{12!}$

Donc la probé que ils soient assis dans la première siége: $\frac{4! \cdot 4!}{12! \cdot 12!}$ Idem pour la 2^{ème} et 3^{ème}

Donc la probé qu'ils soient assis dans la même siége est: $3 \cdot \frac{4! \cdot 4!}{12! \cdot 12!}$

J'ai pas compté ce que font les autres

3] nombre de place coté à coté: (1,2), (2,3), (3,4) = 3

Le nombre de permutations de 2 places: $2! = 2$

donc nombre de possbte que ils sont coté à coté: $3 \cdot 2 = 6$

Le nombre de possbte d'asseoir 2 personnes dans une siége: $4! = 24$ $A_4^2 = 12$

Donc la probé que Louis et Lila sont coté à coté est: $\frac{6}{24} = \frac{1}{4}$

$$\frac{6}{12} = \frac{1}{2} !!!$$

2) $A_4^2 = 12$ le nombre de choix de 4 places pour 2 personnes (Louis et Lila) dans une télésiège.

Il y a 3 télésiège, donc $3 \cdot A_4^2 = 3 \cdot 12$

Finalement : $3 \cdot 12 \cdot 10!$ où $10!$ est le nombre de choix pour s'asseoir pour 10 autres personnes.

Donc la probabilité est : $\frac{3 \cdot 12 \cdot 10!}{12} = \frac{3}{11}$;