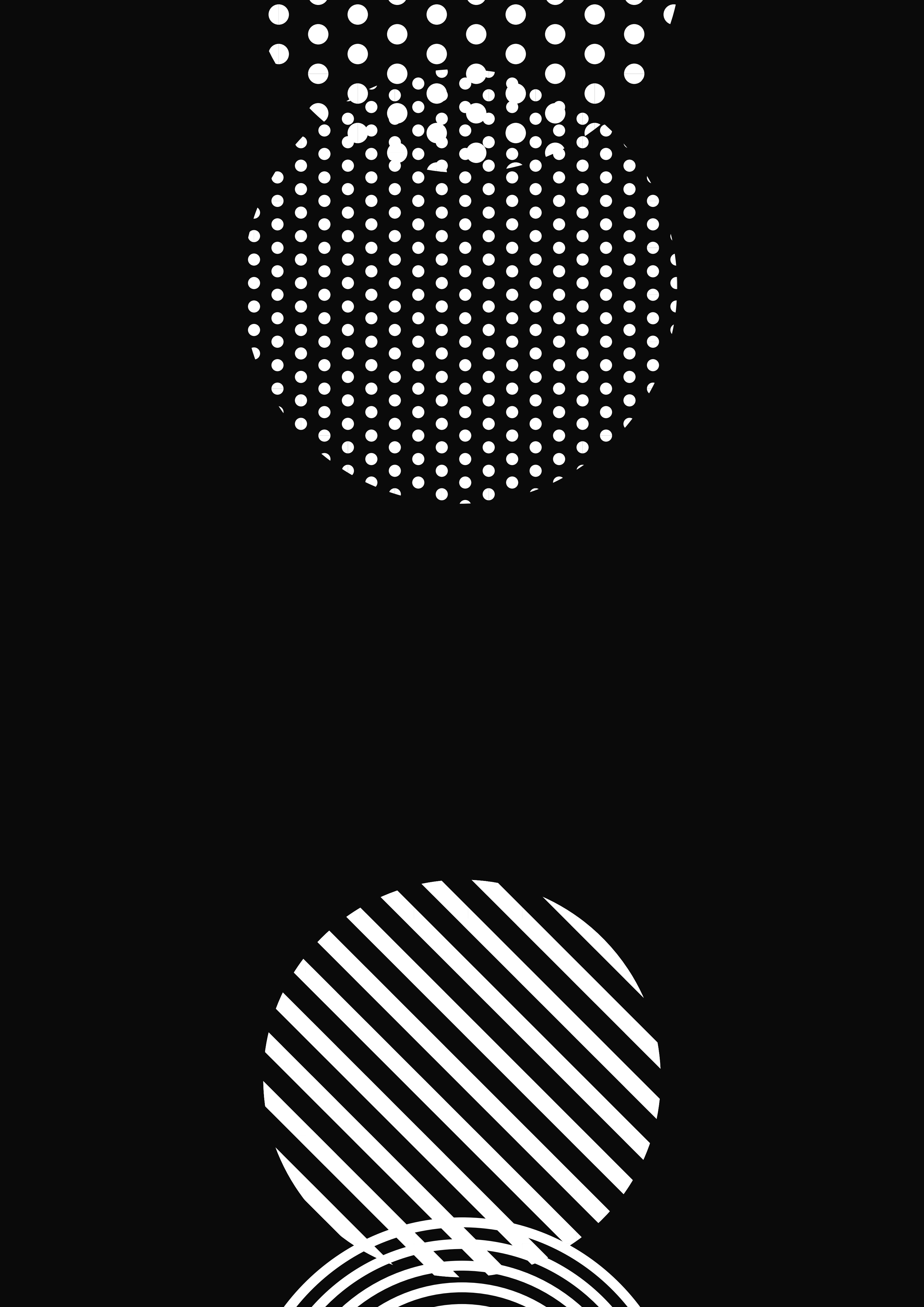

STEPHANE. FISCHLER

Exercice 2

1)

=>) Supposons $1_A \leq 1_B$ Montrons que $A \subset B$

Soit $x \in A$

Par hypothèse $1_A(x) \leq 1_B(x)$

Or $x \in A$, donc $1_A(x) = 1$
d'où $1 \leq 1_B(x)$ avec $1_B(x) \in \{0,1\}$
Donc $1_B(x) = 1$ i.e $x \in B$

<=) Supposons $A \subset B$. Montrons $1_A \leq 1_B$

Soit $x \in \Omega$ But: Montrer que $1_A(x) \leq 1_B(x)$

1 cas: $x \in A$ alors $x \in B$ puisque $A \subset B$

Donc $1_A(x) = 1_B(x) = 1$, on obtient $1_A(x) \leq 1_B(x)$

2 cas: $x \notin A$ alors $1_A(x) = 0$ $1_B(x) \in \{0,1\}$ donc $1_A(x) \leq 1_B(x)$

Conclusion: $1_A \leq 1_B$

$1_A = 1_B$
$\Leftrightarrow 1_A \leq 1_B \wedge 1_B \leq 1_A$
$\Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$
$\Leftrightarrow A = B$

2) $1_{A^c} = 1 - 1_A$ Soit $x \in \Omega$ 1 cas: $x \in A$ $0 = 1 - 1$
2 cas: $x \notin A$ $1 = 1 - 0$

$1_{A \cap B} = 1_A 1_B$

$1_{A \times B} = 1_A 1_B$ $1_{A\times B}(x,y) = 1 \Leftrightarrow x \in A$ et $y \in B$

$A \times B \subset \Omega \times \Omega$
$(x,y) \in \Omega \times \Omega$

3) On suppose $A, B \subset \Omega$ et $\underline{A \cap B = \emptyset}$

$\mathbb{1}_{A \cup B} = \underline{\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B}$

4) On suppose $A, B \subset \Omega$

$A \sqcup B$ désigne $A \cup B$ lorsque $A \cap B = \emptyset$

$A \cup B = \underbrace{A \cup B \setminus A}$ une partition de $A \cup B$

$B \setminus A = B \cap A^c$ $\qquad \mathbb{1}_{B \cap A^c} = \mathbb{1}_B \cdot \mathbb{1}_{A^c} = \mathbb{1}_B \cdot (1 - \mathbb{1}_A)$

$$\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_{B \setminus A} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B (1 - \mathbb{1}_A)$$
$$= \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$$

5) $E \xrightarrow{f} \Omega \xrightarrow{\mathbb{1}_A} \{0, 1\}$

$\mathbb{1}_A \circ f = \mathbb{1}_B$

avec $B = \{x \in E,\ \mathbb{1}_A \circ f(x) = 1\}$

$= \{x \in E : f(x) \in A\}$

$= f^{-1}(A)$ image réciproque de A par f

Soit $\varphi : E \longrightarrow \{0,1\}$

$\varphi = \mathbb{1}_A$ avec $A = \{x \in E,\ \varphi(x) = 1\}$

$\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B \iff A = B$

$\mathcal{P}(E) \longrightarrow \{0,1\}^E = \{\text{fonctions } E \to \{0,1\}\}$

$A \longmapsto \mathbb{1}_A$

Bijection

$\text{Card } \mathcal{P}(E) = 2^{\text{Card } E}$ si E fini

6) Soit $\{A_i\}_{1 \leq i \leq n}$ une partition de A

i.e

$A = \bigcup_{1 \leq i \leq n} A_i = A_1 \cup \ldots \cup A_n$ et $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ $\quad A_i \cap A_j = \emptyset \ \forall 1 \leq i < j \leq n$

Montrons que $\mathbb{1}_A = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i}$

Soit $x \in \Omega$ $\qquad$ • $x \in A \Rightarrow x \in A_i$ et $\forall i \neq j$ $x \notin A_j$

Donc $\mathbb{1}_{A_i}(x) = 1$

$\forall i \neq j$ $\mathbb{1}_{A_j}(x) = 0$ $\qquad$ Donc $\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i}(x) = \mathbb{1}_A(x)$

② $x \notin A$ Alors $\forall 1 \leq i \leq n$, $1_{A_i}(x) = 0$

Donc $\sum_{i=1}^{n} 1_{A_i}(x) = 0 = 1_A(x)$

CCL: $\sum_{i=0}^{n} 1_{A_i} = 1_A$

Partition de A

$(A_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ partition de A $(A_i \subset A)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall i,j \in [\![1,n]\!],\ i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset \\ \bigcup_{i=1}^{n} A_i = A \\ \forall i \in [\![1,n]\!] \quad A_i \neq \emptyset \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall a \in A \quad \exists! i \in [\![1,n]\!] \quad a \in A_i \\ \forall i \in [\![1,n]\!] \quad A_i \neq \emptyset \end{cases}$$

Défi: Soient $x_1, \dots, x_{10} \in \mathbb{Z}$

Montrer qu'il existe $a_1, \dots, a_{10} \in \{-1, 0, 1\}$ tels que $\sum_{i=1}^{10} a_i x_i$ soit divisible par 100

4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

1. $\underbrace{\{P,F\} \times \{P,F\} \times \dots \times \{P,F\}}_{n \text{ fois}}$

Notons 0 représente Pile et 1 - Face

$\Omega = \{0,1\}^n$

Évènement élémentaire: élément $\omega \in \Omega$. [ici $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$

avec $\omega_i = 0 \Leftrightarrow$ le $i^{\text{ème}}$ lancer donne Face

2. $F = \{(\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega \mid \omega_2 = \omega_1 = 1\}$
$= \{(1, 1, \omega_3, \dots, \omega_n) \in \Omega\}$

<u>Événement = partie de Ω</u>

3. Soit $i_0 \in \{1, \dots, n\}$

$E_{i_0} = \{(\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega \mid \omega_{i_0} = 0\}$

4. $F = (E_1 \cup E_2)^c$ car $E_1 \cup E_2$ est l'événement :
"avoir pile a 1er lancer ou au 2ème lancer"

$F = E_1^c \cap E_2^c$

5. $G =$ "au moins une fois pile"

G^c : "zero fois pile" = "toujours face"
$= E_1^c \cap E_2^c \cap \dots \cap E_n^c$

car E_i^c = "face au ième lancer"

$G = (G^c)^c = (E_1^c \cap \dots \cap E_n^c) = (E_1^c)^c \cup \dots \cup (E_n^c)^c$
$= E_1 \cup \dots \cup E_n$

Autre méthode :
$G = \{(\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega \mid \exists i \in [\![1, \dots, n]\!] \ \omega_i = 0\}$
$= \{\omega \in \Omega \mid \exists i \in [\![1, \dots, n]\!] \ \omega \in E_i\}$
$= E_1 \cup \dots \cup E_2$
= "pile au 1 lancer" ou ... ou "pile au n lancer"

5) On appelle collection la suite des numeros des images obtenues.
Ex. de collection : $(3, 1, 5, 1, 3, 7, 8, 1, 2, 3)$

1) $\Omega = [\![1, N]\!] \times \dots \times [\![1, N]\!]$
$= [\![1, N]\!]^{10}$

2) E_i : "l'enfant n'a pas l'image numero i"

$E_i = \{(\omega_1, \dots, \omega_{10}) \in \Omega \mid \forall j \in \{1, \dots, 10\} \ \omega_j \neq i\}$

$= ([\![1, 10]\!] \setminus \{i\})^{10}$

3) $F_{i,j} = \{\omega = (\omega_1, \dots, \omega_{10}) \in \Omega \mid \omega_j = i \text{ et } \forall k \in [\![1, j-1]\!] \ \omega_k \neq i\}$

$F_{i,j} = ([\![1, N]\!] \setminus \{i\})^{j-1} \times \{i\} \times [\![1, N]\!]^{10-j}$