$X \sim B(n,p)$ Soit $\lambda = np \Rightarrow p = \frac{\lambda}{n}$

Alors $P(X=k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$

Pour n grand $\frac{n^k p^k}{k!} \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{\underbrace{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}_{k \text{ fois}}} (1-p)^{n-k}$

$$\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{\underbrace{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}_{k \text{ fois}}} = 1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k+1}{n}\right)$$

chaque terme tend vers 1 en $n \to +\infty$

donc toute fraction $\xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$

D'où $P(X=k) = \frac{(np)^k}{k!} (1-p)^{n-k}$

$$(1-p)^{n-k} = \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \exp\left[\log\left((1-p)^{n-k}\right)\right]$$

$$\log\left((1-p)^{n-k}\right) = (n-k)\log(1-p) \approx (n-k)(-p+o(p))$$

$$\approx -pn + pk + o(pn)$$

$$\approx -pn + o(1) + o(1) + \dots o(1)$$

$$\longrightarrow -\lambda$$

$$e^{\log\left((1-p)^{n-k}\right)} \longrightarrow e^{-\lambda}$$

Donc $P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

Ce qui est une formule de loi de poisson.

Ex: Une usine produit $n = 1000$ produits et la chance pour produit être défecté est $p = 0.002$
On veut calculer probabilité que 3 produits soient défectes.

$\lambda = np = 1000 \cdot 0{,}002 = 2$

$P(X=3) = \frac{2^3}{3!} e^{-2} = e^{-2} \frac{8}{6} \approx 0{,}1804$