



Univers et événements:

Univers - on note Ω l'espace de tous événements possibles qui peuvent arriver.

Ex: Lancer de dé : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Événements:

On note $A \subset \Omega$ une partie de Ω
un ensemble des événements particuliers qui peuvent arriver.

Ex: Avec le même dé, où $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
 $A = \text{"le nombre sur le dé est pair"} = \{2, 4, 6\}$

Mesure de probabilité

$A \subset \Omega$

$P(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega)$ = la probabilité que un des événements de A arrive.

$p(\omega)$ - la probabilité que un événement arrive.

$$p(\omega) = \frac{1}{\#\Omega}$$

Probabilité produit

Explication directement avec exemple

$A = E_2 = \text{lancer une pièce} = \{\text{pile}, \text{face}\}$ P_A - probas pour
 $B = E_6 = \text{lancer de dé} = \{1, \dots, 6\}$ P_B - Chacun

On suppose que A et B sont indépendants (c'est vrai)

donc on construit $\Omega = A \times B = \{(\text{pile}, 1), (\text{pile}, 2), \dots, (\text{pile}, 6),$
 $(\text{face}, 1), \dots, (\text{face}, 6)\}$

$$\#\Omega = \#A \cdot \#B = 2 \cdot 6 = 12$$

$$P(\{\text{pile}, 2\}) = \text{le proba qu'on obtient pile et 2 est } P_A(\text{pile}) = \frac{1}{2}, P_B(2) = \frac{1}{6}$$
$$\hookrightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = P_A(\text{pile}) \cdot P_B(2) = \frac{1}{12} = \frac{1}{\#\Omega}$$

Indépendance et conditionnelle

Explication par exemple:

On lance un dé: $\Omega = \{1, \dots, 6\}$

$A = \text{"résultat pair"} = \{2, 4, 6\}$

$C = \text{"résultat est 4"} = \{4\}$

$$P(A) = \frac{3}{6} \text{ car } = \frac{3}{6}$$

$$P(C) = \frac{1}{6}$$

On veut calculer la probabilité que
le résultat est pair et 4 en même temps.
" $P(A)$ " " $P(C)$ "

On a l'habitude de calculer ça en multipliant
les 2 probabilités: $P(A) \cdot P(C)$ ce qui est faux

car $P(A) \cdot P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$ ce qui est faux

car évidemment 4 est pair et probas d'obtenir 4
est $\frac{1}{6}$

Dans ce cas on procède à cette façon:

la probabilité de A, puis probas de C
sachant A.

En effet, c'est logique, la probas de pair est $\frac{1}{2}$

si on sait qu'on a un nombre pair, donc on a soit 2, soit 4, soit 6
suppose

il nous reste à calculer la probas de 4 dans $\{2, 4, 6\}$
(=) C sachant A
 $P(C|A)$

$$\text{ce qui est } \frac{\#\{4\}}{\#\{2, 4, 6\}} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Finalement } P(A) \cdot P(C|A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

La notation pour les événements arrivant en même
temps est: $A \cap B$, en probabilité: $P(A \cap B)$

$$\text{Donc, comme on a dit avant } P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

Pour les événements indépendants:

(encore exemple avec pièce et dé)

$A = \text{pièce}$, $B = \text{dé}$. (Ils sont vraiment indépendants)

$P(A|B)$ proba d'une pièce, sachant le résultat de dé

↳ Okay, j'ai obtenu 4 pour le dé, comment ça change le résultat d'une lancée de pièce? La réponse évidente: ça change rien.

$P(A|B) = P(A)$ - probas d'une pièce sachant dé et toujours seulement probas d'une pièce.

Appliquons ça à l'arrivée des événements en même temps:

$$\hookrightarrow P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B) = P(B) \cdot P(A)$$

Indépendance conditionnelle:

Encore exemple:

$A = \text{"le bus 6 ne circule pas"}$

$B = \text{"les cours sont annulés"}$

Le fait que le bus ne circule pas peut nous donner des informations sur la probabilité d'annulation de cours. Ou même les cours sont annulés à cause d'arrêt des bus.

Maintenant on introduit l'événement $C = \text{"le campus est inondé"}$. Sachant cela l'arrêt de circulation nous donne rien pour la probabilité de l'annulation des cours. Donc sachant C , A et B deviennent indépendants.

Formule:

$$P(A \cap B | C) = P(A | C) \cdot P(B | C)$$

Variables aléatoires

$\Omega \rightarrow$ l'espace d'événements

$X: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n \rightarrow$ variable aléatoire.

Juste une fonction qui a comme ensemble de départ: Ω .

Ex: l'événement: lancer 2 dé

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \{(1, 1), (1, 2), \dots, (6, 5), (6, 6)\}$$

On définit $X(\omega) = \omega_1 + \omega_2$ la somme des résultats.
 (ω_1, ω_2)

$$X(\Omega) = \{2, 3, 4, \dots, 12\}$$

Rq: Il existe une réciproque X^{-1} mais pas bijective.

$$\text{Ex: } X^{-1}(\{6\}) = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}$$

$\hookrightarrow$ les résultats qui donnent 6 comme une somme

$$X^{-1}(\mathbb{Z}) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in \mathbb{Z}\} \subset \Omega$$

Notations *

$$\{X = x\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\} \text{ (de même avec } <, >, \leq, \geq, \neq)$$

$$\{X \in \mathbb{Z}\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in \mathbb{Z}\}$$

$$P_X(A) = P(X \in A) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\})$$

Espérance d'une variable aléatoire

Formule: $\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) \cdot X(\omega)$

Ex: On lance un dé, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
la moyenne: $E[X] = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot 3 + \frac{1}{6} \cdot 4 + \frac{1}{6} \cdot 5 + \frac{1}{6} \cdot 6 = 3.5$

ça signifie que si on lance un dé beaucoup de fois, la moyenne des résultats obtenus sera 3.5 (le plus probable)

Fors classiques

ce sont les formules qui facilitent les calculs de l'espérance.