



Exercice 1

1) # $\Omega = 9!$ car il y a 9 partitions et il y a 5! possibilité de les permurer.
Une fois le joueur de contrebass a bien sa partition, il reste à attribuer les 8 autres partitions, dont il y a 8! possibilité.

$$\text{finalement: } \frac{8!}{9!} = \frac{1}{9}$$

2) Il faut attribuer 4 violons à 4 violonists dont le nombre de possibilité est: 4!

Et 5 partitions restent à 5 joueurs restants: 5!

$$\text{Finalement: } \frac{4! \cdot 5!}{9!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \frac{1}{3 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 3} = \frac{1}{126}$$

3) Nombre de configurations favorables: $4! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 1!$

$$\text{probu: } \frac{4! \cdot 2! \cdot 2!}{9!} = \frac{1 \cdot 2}{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9} = \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}$$

Exercice 2

Soit $(\Omega, \mathcal{P})$ et $E_1, E_2, E_3 \subset \mathcal{P}$

Si E_1, E_2, E_3 sont indépendants, alors:

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1)P(E_2)$$

$$P(E_2 \cap E_3) = P(E_2)P(E_3)$$

$$P(E_1 \cap E_3) = P(E_1)P(E_3)$$

$$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = P(E_1)P(E_2)P(E_3)$$

2) A : "J-L a voté pour Fi"
 B : "Benoît a voté pour Emmanuelle"
 C : "Ils ont voté pour la même personne"

$$\Omega = \{F, E\}^2 \quad P = Q \times Q$$

$$P(\omega) = Q(\omega_1) \cdot Q(\omega_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \quad \text{car} \\ \text{l'un vote indépendamment de l'autre.}$$

$$A = \{(F, E), (F, F)\} \quad \#A = 2 \quad \#\Omega = 4$$

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$B = \{(F, E), (E, E)\} \quad \#B = 2$$

$$P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$C = \{(F, F), (E, E)\} \quad \#C = 2$$

$$P(C) = \frac{1}{2}$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \quad \text{ce qui est vrai}$$

$$C \cap A = \{F, F\} \quad P(C \cap A) = \frac{1}{4} = P(C) \cdot P(A)$$

$$C \cap B = \{E, E\} \quad P(C \cap B) = \frac{1}{4} = P(C) \cdot P(B)$$

Donc ces événements sont distincts 2 à 2.

$$P(C \cap A \cap B) = 0 \neq P(C \cap A) \cdot P(B) \quad \text{donc ne sont pas} \\ \text{totalement indépendants}$$

d) $A \cap C$ = "Jean-Luc et Benoît ont voté pour Emmanuel"

$$P(A \cap C) = \frac{1}{4} = P(A) \cdot P(C) \quad \text{donc } A \text{ et } C \text{ sont indépendants.}$$

(3) Alors $P(A) = \frac{1}{4}$ $P(B) = \frac{3}{4}$ $P(C) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$

$$= \frac{9}{16} + \frac{1}{16} = \frac{10}{16}$$

Exercice 3 T = "pièce truquée" F = "Face"

1. (a) $P(F) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$

$$P(F) = P(F|T) \cdot P(T) + P(F|T^c) \cdot P(T^c)$$

b) $P(T|F) = \frac{P(F|T) \cdot P(T)}{P(F)} = \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{5}{8}} = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{5}{8}} = \frac{3}{5}$

F_1 = "Face au premier lancer"

F_2 = "Face au deuxième lancer"

$$P(F_1 \cap F_2 | T) = P(F_1 | T) P(F_2 | T) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$$

$$P(F_1 \cap F_2 | T^c) = P(F_1 | T^c) P(F_2 | T^c) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P(T | F_1 \cap F_2) = \frac{P(F_1 \cap F_2 | T) P(T)}{P(F_1 \cap F_2)} =$$

$$\frac{P(F_1 \cap F_2 | T) \cdot P(T)}{P(F_1 \cap F_2 | T) \cdot P(T) + P(F_1 \cap F_2 | T^c) P(T^c)} = \frac{\frac{9}{16} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{9}{16} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\frac{9}{32}}{\frac{9}{32} + \frac{1}{8}}$$

$$= \frac{\frac{9}{32}}{\frac{13}{32}} = \frac{9}{13}$$

d) Ils ne sont pas indépendants car
 $P(F_1) \cdot P(F_2) = \frac{25}{64}$ *

$$P(F_1 \cap F_2) = P(F_1 \cap F_2 | T) \cdot P(T) + P(F_1 \cap F_2 | T^c) \cdot P(T^c) = \frac{13}{32}$$

(2.) (a)

$$P(F_1 \cup F_2 | T^c) = 1 - P(F_1^c \cap F_2^c | T^c)$$

$$= 1 - P(F_1^c | T^c) \cdot P(F_2^c | T^c)$$

$$= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{2}{4}$$

$$(b) X_1 = \mathcal{B}(50, \frac{3}{4})$$

$$(c) 1 - (F_1^c \cap F_2^c | T) = 1 - P(F_1^c | T) \cdot P(F_2^c | T) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

$$(d) X_2 = \mathcal{B}(50, \frac{1}{16})$$

$$(e) E[X_1] = 50 \cdot \frac{3}{4}$$

$$E[X_2] = 50 \cdot \frac{1}{16}$$

$$E[X_1 + X_2] = E[X_1] + E[X_2]$$

$$= 50 \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{16} \right)$$

$$= 50 \left(\frac{12}{16} + \frac{1}{16} \right) = 50 \frac{13}{16} = 25 \cdot \frac{13}{8}$$

Exercice 1

$$(a) \quad P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$(b) \quad P(E_1 \cap E_2 | E_3) = P(E_1 | E_3) P(E_2 | E_3)$$

$$(c) \quad P(E_1 \cap E_2 | E_3) = P(E_1 | E_3) P(E_2 | E_3)$$

$$P(E_1 \cap E_3 | E_2) = P(E_1 | E_2) P(E_3 | E_2)$$

$$\frac{P(E_1 \cap E_2 \cap E_3)}{P(E_3)} = \frac{P(E_1 \cap E_3)}{P(E_3)} \cdot \frac{P(E_2 \cap E_3)}{1}$$

$$\frac{P(E_1 \cap E_2 \cap E_3)}{P(E_2)} = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)} \cdot \frac{P(E_3 \cap E_2)}{1}$$

$$P(E_1 | E_3) P(E_2 \cap E_3) = P(E_1 | E_2) P(E_2 \cap E_3)$$

$$\Leftrightarrow P(E_2 \cap E_3) (P(E_1 | E_3) - P(E_1 | E_2)) = 0$$

$$\Leftrightarrow P(E_2 \cap E_3) = 0 \text{ ou } P(E_1 | E_3) - P(E_1 | E_2) = 0 \\ \Rightarrow P(E_1 | E_3) = P(E_1 | E_2)$$

2) $A =$ "les 2 premiers sont pairs"
 $B =$ "les 2 derniers sont pairs"
 $C =$ "le résultat du deuxième est pair"

$$(a) \quad A = \{2, 4, 6\}^2 \times \{1, \dots, 6\} \quad 36 \cdot 6 = \\ \#A = 3^2 \cdot 6 = 54$$

$$P(A) = \frac{54}{216} = \frac{5}{36} = \frac{1}{4}$$

$$B = \{1, \dots, 6\} \times \{2, 4, 6\}^2$$

$$\#B = 6 \cdot 3^2 = 54$$

$$P(B) = \frac{1}{4}$$

$$C = \{1, \dots, 6\} \times \{6\} \times \{1, \dots, 6\}$$

$$\#C = 6 \cdot 6 = 36 = \frac{36}{216} = \frac{1}{6}$$

$$b) P(A \cap B | C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P(A|C) \cdot P(B|C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Indép.

c)

$$P(A \cup B | C) = \frac{P((A \cup B) \cap C)}{P(C)}$$

$$P((A \cup B) \cap C) \stackrel{?}{=} P(A \cup B) - P(C)$$

$$P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

$$\begin{aligned} P((A \cup B) \cap C) &= P((A \cap C) \cup (B \cap C)) = P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C) \\ &= P(A|C)P(C) + P(B|C)P(C) - P(A \cap B|C) \cdot P(C) \\ &= P(C)(P(A|C) + P(B|C) - P(A \cap B|C)) \end{aligned}$$

$$P(A|C) = \frac{1}{2} \neq \frac{1}{4} = P(A) = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{8} \neq \frac{3}{8}$$

Donc ils ne sont pas indépendants.

Exercice 2

1) a) Il y a 3 personnes dans chaque groupe,
donc 3! permutation.
Principe multiplicatif 3! · 3! · 3! · 3!

b) Possibilité de Sophie à droite: 2!
Possibilité de Alio à gauche: 2!
Le reste de gens: 3! · 3!

$$\text{Donc la probabilité: } \frac{2! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 3!}{(3!)^4} = \frac{2! \cdot 2!}{2! \cdot 3!} = \frac{1}{3 \cdot 3} = \frac{1}{9}$$

Idem avec Tom et Baptiste: $\frac{1}{9}$

$$\text{Le proba d'intersection est: } \frac{2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!}{(3!)^4} = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9}$$

Donc ces événements sont indépendants.

2] les possibilité totales = 12:

Les possibilité de ranger les témoins: $3! \cdot 3!$
leur placer parmi les autres 10

Tous les possibilité de les se retrouver: $3! \cdot 10!$

$$\text{proba: } \frac{3! \cdot 10!}{12!} = \frac{6}{11 \cdot 12} = \frac{1}{22}$$

3] $\left(\frac{2}{3}\right)^4$

Exercice 3

C = "passer avec Christine" $P(C) = \frac{1}{2}$ $P(C^c) = \frac{1}{2}$

E = "passer l'examen"

$$P(E|C) = \frac{6}{10} \quad P(E|C^c) = \frac{4}{10}$$

$$2. a) P(E) = P(E|C)P(C) + P(E|C^c)P(C^c) = \frac{6}{10} \cdot \frac{1}{2} + \frac{4}{10} \cdot \frac{1}{2}$$

$$P(E^c) = 1 - P(E) = \frac{2}{2} = \frac{3}{10} + \frac{6}{10} = \frac{1}{2}$$

$$P(C|E^c) = \frac{P(E^c|C)P(C)}{P(E^c)} = \frac{\frac{4}{10} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

$$P(D|E^c) = \frac{P(E^c|D)P(D)}{P(E^c)} = \frac{\frac{6}{10} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

(b) R_1 = "Antoine réussi"

R_2 = "B. réussi"

AC = "Antoine avec Christine, B. Denis" $P(AC) = \frac{1}{2}$

$$P(AC|R_1^c \cap R_2) = \frac{P(R_1^c \cap R_2 | AC) \cdot P(AC)}{P(R_1^c \cap R_2)}$$

$$= \frac{P(R_1^c \cap R_2 | AC) \cdot P(AC)}{P(R_1^c \cap R_2 | AC) \cdot P(AC) + P(R_1^c \cap R_2 | AC^c) \cdot P(AC^c)}$$

$$= \frac{P(R_1^c | C)P(R_2 | C^c) \cdot P(AC)}{P(R_1^c | C)P(R_2 | C^c) \cdot P(AC) + P(R_1^c | C^c) \cdot P(R_2 | C) \cdot P(AC^c)}$$

$$= \frac{\frac{16}{100} \cdot \frac{1}{2} = \frac{8}{100}}{\frac{8}{100} + \frac{6}{10} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{\frac{8}{100}}{\frac{8}{100} + \frac{18}{100}} = \frac{8}{26} = \frac{4}{13}$$

$$3) \quad X = \beta(1, \frac{1}{2})$$

$$4) \quad S = \beta(1, \frac{6}{10})$$

$$T = \beta(1, \frac{4}{10})$$

$$P(S > T)$$

$$P(E_1 \cap E_3 | E_2) = P(E_1 | E_2) P(E_3 | E_2)$$

$$P(E_1 \cap E_2 | E_3) = P(E_1 | E_3) P(E_2 | E_3)$$

$$= \frac{P(E_1 \cap E_2 \cap E_3)}{P(E_3)} = \frac{P(E_1 \cap E_2 \cap E_3)}{P(E_2)}$$

=