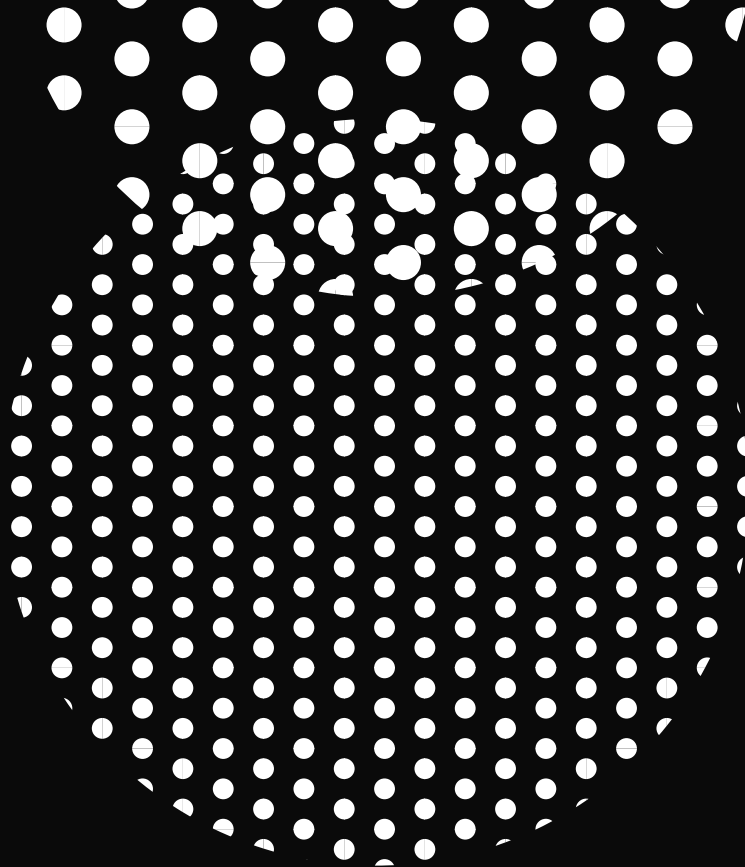




Variance

Déf

Si X est une variable aléatoire intégrable, on définit la variance de X : $\text{Var}(X) = E[(X - E[X])^2]$
c'est un nombre positif ou nul "valeur moyenne du carré des écarts de X à son espérance"

$\sqrt{\text{Var}(X)}$ est appelé écart-type de X .

Remarques

- $\text{Var}(X) = 0$ ssi X est constante et égale à son espérance.

$$\text{Var}(X) = \sum_x (x - E[X])^2 \cdot P(X=x) = 0 \text{ ssi } \forall x \text{ tq } P(X=x) > 0, x = E[X]$$

- $\text{Var}(X) < +\infty$ ssi X^2 est intégrable (X est de carré intégrable)
car $(X - E[X])^2 \leq 2(X^2 + E[X]^2)$

$$(X - E[X])^2 = X^2 - 2XE[X] + E[X]^2 = 2[X^2 + E[X]^2] - (X - E[X])^2 \\ = (X + E[X])^2 \geq 0$$

Prop:

Si X est intégrable
 $\text{Var}(X) = E[X^2] - E[X]^2$

pv: $\underbrace{(X - E[X])^2}_{\text{v.a.}} = X^2 - 2\underbrace{E[X]}_{\text{nombre}}X + E[X]^2$

$$\begin{aligned} E[(X - E[X])^2] &= E[X^2 - 2E[X]X + E[X]^2] \\ &\stackrel{\text{linéarité}}{=} E[X^2] - E[\underbrace{2E[X]}_{\text{nbre réel}} \cdot \underbrace{X}_{\text{nbre réel}}] + E[E[X]^2] \\ &= E[X^2] - 2E[X]E[X] + E[X]^2 \\ &= E[X^2] - E[X]^2 \end{aligned}$$

Prop: Si X est de carré intégrable

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \text{Var}(\lambda X) = \lambda^2 \text{Var}(X)$$

pv: $\text{Var}(\lambda X) = E[(\lambda X - E[\lambda X])^2]$

mais $E[\lambda X] = \lambda E[X]$ par linéarité de l'espérance

$$\begin{aligned} \text{Donc } \text{Var}(\lambda X) &= E[(\lambda X - \lambda E[X])^2] = E[(\lambda \cdot (X - E[X]))^2] = E[\lambda^2 \cdot (X - E[X])^2] \\ &= \lambda^2 E[(X - E[X])^2] \\ &= \lambda^2 \text{Var}(X) \end{aligned}$$

prop: Si X est de carré intégrable, alors $\forall a \in \mathbb{R}, \text{Var}(X+a) = \text{Var}(X)$

pv: $\text{Var}(X+a) = E[(X+a - E[X+a])^2]$
 $= E[(X+a - (E[X]+a))^2]$ par linéarité
 $= E[(X - E[X])^2]$
 $= E[(X - E[X])^2] = \text{Var}(X)$

Résumé: Si X $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, \text{Var}(aX+b) = a^2 \text{Var}(X)$

Prop: Si X est de carré intégrable, alors X est intégrable

pv: X est de carré intégrable $\Leftrightarrow E[X^2] < +\infty$
 X est intégrable $\Leftrightarrow E[|X|] < +\infty$

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 &\geq 2|x| \text{ car } x^2 + 1 - 2|x| = (|x| - 1)^2 \text{ (notez que } x^2 = |x|^2) \\ \text{Donc } 2|x| &\leq x^2 + 1 \\ \text{Donc } E[X^2] < +\infty, &2E[|X|] < +\infty, \text{ donc } E[|X|] < +\infty \end{aligned}$$

prop Si X et Y sont des v.a. indep et intégrables, alors $X \cdot Y$ est intégrable et $E[X \cdot Y] = E[X] \cdot E[Y]$

pv: Soient X et Y v.a. indep et intégrables. Montrons que $E[|X \cdot Y|] < +\infty$

$$\begin{aligned} E[|XY|] &= \sum_{x,y} |x \cdot y| P(X=x \text{ et } Y=y) = \sum_{x,y} |x| |y| P(X=x) P(Y=y) \text{ car } X \text{ et } Y \text{ sont indep.} \\ &= \left(\sum_x |x| P(X=x) \right) \cdot \left(\sum_y |y| P(Y=y) \right) = E[|X|] \cdot E[|Y|] < +\infty \\ &\text{car } E[|X|] < +\infty \text{ et } E[|Y|] < +\infty \end{aligned}$$

Donc XY est intégrable et $E[XY] = E[X]E[Y]$

prop. Si X et Y sont des v.a. indép. et intégrables
 $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$

pr
 $Var(X+Y) = E[(X+Y)^2] - E[(X+Y)]^2$
 $E[(X+Y)^2] = E[X^2 + Y^2 + 2XY] = E[X^2] + E[Y^2] + 2E[XY]$ par lin.
 $= E[X^2] + E[Y^2] + 2E[X]E[Y]$ car X et Y indép.
 $E[(X+Y)]^2 = (E[X] + E[Y])^2 = E[X]^2 + E[Y]^2 + 2E[X]E[Y]$
Donc $E[(X+Y)^2] - E[(X+Y)]^2 = E[X^2] + E[Y^2] - E[X]^2 - E[Y]^2$
 $= (E[X^2] - E[X]^2) + (E[Y^2] - E[Y]^2)$
 $= Var(X) + Var(Y)$

Corollaire Si $X_1, \dots, X_n$ sont des v.a. indép. intégrables
 $Var(X_1 + \dots + X_n) = Var(X_1) + \dots + Var(X_n)$

pr: par récurrence

• $n=1$ vrai

• Supposons que la variance de la somme de n v.a. indép. intégrables est la somme de leurs variances

Soient $X_1, \dots, X_{n+1}$ des v.a. indép. et intégrables

Posons $X = X_1 + \dots + X_n$ et $Y = X_{n+1}$

Alors X et Y sont des v.a. indép. et intégrables
car $|X| \leq |X_1| + \dots + |X_n|$

Donc $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$

$Var(X_1 + \dots + X_n) + Var(Y) = Var(X_1) + \dots + Var(X_n) + Var(X_{n+1})$
en utilisant l'hypothèse de récurrence

Calculs de variance de lois importantes

Si: $X \sim \mathcal{B}(p)$, $\text{Var}(X) = p(1-p)$

pr: Si: $X \sim \mathcal{B}(p)$, $E[X] = p$
 $E[X^2] = 0^2 \cdot P(X=0) + 1^2 \cdot P(X=1) = p$
Donc $\text{Var}(X) = p - p^2 = p(1-p)$

Si: $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, $\text{Var}(X) = np(1-p)$

pr: la variance ne dépend que de la loi
Soient $X_1, \dots, X_n$ indépendantes et de loi $\mathcal{B}(1, p)$
Soit $S = X_1 + \dots + X_n$, alors $S \sim \mathcal{B}(n, p)$
et donc $\text{Var}(S) = \text{Var}(X)$ pour tout X de loi $\mathcal{B}(1, p)$
 $\text{Var}(S) = \text{Var}(X_1 + \dots + X_n) = \text{Var}(X_1) + \dots + \text{Var}(X_n)$ car $X_1, \dots, X_n$ sont indep.
 $= p(1-p) + \dots + p(1-p)$
 $= np(1-p)$

Si: $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $\text{Var}(X) = \lambda$

Deux remarques qui donnent l'intuition

1) Si $Z \sim \mathcal{B}(n, p)$ avec n grand et p petit,

Approximation $Z \sim \text{Pois}(np)$ $\text{Var}(Z) = np(1-p) \approx np$

2) Si X et Y sont indépendantes, $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$
 $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$, $\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$

Donc $\lambda \mapsto \text{Var}(X_\lambda) = h(\lambda)$, où $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$
est une fonction linéaire.

Pr de la prop. Soit $X \sim P(\lambda)$, $E[X] = \lambda$

$$\text{Var } X = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - E[X]^2 = E[X^2] - \lambda^2$$

$$\begin{aligned} E[X^2] &= \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 P(X=k) = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \sum_{k=1}^{+\infty} k \frac{\lambda^k}{(k-1)!} e^{-\lambda} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} [(k-1) + 1] \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{(k-1)!} = \sum_{k=1}^{+\infty} (k-1) \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{(k-1)!} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} e^{-\lambda} \\ &= \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{(k-2)!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{k+1}}{k!} e^{-\lambda} \\ &= \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{l+2}}{l!} e^{-\lambda} + \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{l+1}}{l!} e^{-\lambda} \\ &= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{\lambda^l}{l!} + \lambda e^{-\lambda} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{\lambda^l}{l!} = \lambda^2 + \lambda \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \text{Var}(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

Et si X et Y ne sont pas indépendants?

loi jointe: loi de (X, Y)

X et Y indépendantes $\Leftrightarrow$ loi de (X, Y) : loi de X $\otimes$ loi de Y
Si X et Y ne sont pas indépendantes, il ne suffit pas
connaître la loi de X et loi de Y pour connaître la loi de (X, Y) .

Covariance de X et Y :

Si X et Y sont de carrée intégrable, alors XY
est intégrable et on peut définir la covariance de X et Y

$$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - E[X]) \cdot (Y - E[Y])]$$

Soient X et Y de carrée intégrable.

Pour tous réels x et y , $2|xy| \leq x^2 + y^2$ car $x^2 + y^2 - 2|xy|$
 $= x^2 + y^2 - 2|x| \cdot |y|$
 $= (x - |y|)^2 \geq 0$

Donc $|XY| \leq \frac{x^2 + y^2}{2}$

$E[X^2] < \infty$ et $E[Y^2] < \infty$ donc $E|XY| < \infty$

Est-ce que $E\{|(X - E[X]) \cdot (Y - E[Y])|\} < \infty$? v.a. bien définies car X et Y sont intégrables

$|(X - E[X]) \cdot (Y - E[Y])| = |X - E[X]| \cdot |Y - E[Y]| \leq (|X| + |E[X]|) \cdot (|Y| + |E[Y]|)$
 par l'inégalité triangulaire.

$\leq \underbrace{|X \cdot Y|}_{\text{intégrable}} + \underbrace{|E[X]| \cdot |Y|}_{< \infty} + \underbrace{|E[Y]| \cdot |X|}_{\text{intégrable}} + \underbrace{|E[X]| \cdot |E[Y]|}_{< \infty}$
 Intégrable

Donc $E\{|(X - E[X]) \cdot (Y - E[Y])|\} < \infty$

Prop: Si X et Y de carrée intégrable
 $\text{Cov}(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$

$\text{Cov}(X, Y) =$
 $= E[XY] - E[X]E[Y]$

$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - E[X]) \cdot (Y - E[Y])] = E[XY - E(X)Y - E(Y)X + E[X]E[Y]]$
 $= E[XY] - E[X]E[Y] - E[Y]E[X] + E[X]E[Y]$
 $= E[XY] - E[X]E[Y]$

Remarque $\text{Cov}(X, X) = \text{Var}(X)$

Prop Si X et Y sont des v.a. de carrée intégrable
 $\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\text{Cov}(X, Y)$

pr: $\text{Var}(X + Y) = E[(X + Y)^2] - E[(X + Y)]^2 = E[X^2 + Y^2 + 2XY] - (E[X] + E[Y])^2$
 $= E[X^2] + E[Y^2] + 2E[XY] - (E[X]^2 + E[Y]^2 + 2E[X]E[Y])$
 $= E[X^2] - E[X]^2 + E[Y^2] - E[Y]^2 + 2(E[XY] - E[X]E[Y])$
 $= \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\text{Cov}(X, Y)$

prop: Si X et Y sont des v.a. de carré intégrable et indépendantes
alors $\text{Cov}(X, Y) = 0$

pv: $\text{Var}(X+Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$ car X et Y indépendantes.
Mais aussi $\text{Var}(X+Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\text{Cov}(X, Y)$
Donc $\text{Cov}(X, Y)$

Ex: Soit X de loi uniforme sur $\{-1, 0, 1\}$
Soit Z indépendante de X à valeurs dans $\{-1, 1\}$, $p = P(Z=1)$
Soit $Y = X \cdot Z$ loi de X, Y !

$\begin{matrix} X \\ Y \end{matrix}$	-1	0	1
-1	$\frac{p}{3}$	0	$\frac{1-p}{3}$
0	0	$\frac{1}{3}$	0
1	$\frac{1-p}{3}$	0	$\frac{p}{3}$
	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

$$\begin{aligned} P((X, Y) = (-1, -1)) &= P(X = -1 \cap Z = 1) \\ &= P(X = -1) P(Z = 1) \\ &= \frac{1}{3} p \end{aligned}$$

$$P((X, Y) = (0, 0)) = P(X = 0)$$

$$\text{Cov}(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$$

$$E[X] = E[Y] = (-1) \cdot \frac{1}{3} + (0 \cdot \frac{1}{3}) + 1 \cdot \frac{1}{3} = 0$$

$$\begin{aligned} E[XY] &= \sum xy P((X, Y) = (x, y)) = (-1)(-1) \frac{1}{3} + 0(-1) \cdot 0 + 1(-1) \left(\frac{1-p}{3}\right) \\ &\quad + (-1) \cdot 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 \left(\frac{1-p}{3}\right) \\ &\quad + 0 \cdot 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \cdot \frac{p}{3} \\ &= \frac{2p}{3} - \frac{2(1-p)}{3} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \text{Cov}(X, Y) = \frac{2}{3} (2p - 1)$$

Rq $E[XY] = E[XXZ] = E[X^2Z] = E[X^2]E[Z]$ car X et Z sont indép.

Rq $\text{Cov}(X, Y) = 0 \Leftrightarrow p = \frac{1}{2}$

Si $p = \frac{1}{2}$, est-ce que X et Y sont indép.?

Non $P((X, Y) = (0, 1)) \neq P(X=0) \cdot P(Y=1)$

X et Y sont indépendantes $\Leftrightarrow \forall (x, y), P((X, Y) = (x, y)) = P(X=x) P(Y=y)$

