



Autres mesures de dispersion

Inégalité de Markov

Si X est une v.a. positive ou nulle,
 $\forall \lambda > 0, P(X > \lambda) \leq \frac{E[X]}{\lambda}$

Rq cette inégalité dit quelque chose d'intéressant
si $E[X] < \infty$ et $\lambda > E[X]$

pr: Soit X une v.a. positive ou nulle et soit $\lambda > 0$
 $P(X \geq \lambda) = P(A)$ où est l'événement $\{X \geq \lambda\}$ $P(A) = E(\mathbb{1}_A)$
 $= E[\mathbb{1}_{X \geq \lambda}]$

$$\mathbb{1}_{X \geq \lambda} = \begin{cases} 1 & \text{si } X \geq \lambda \text{ i.e. } \frac{X}{\lambda} \geq 1 \\ 0 & \text{si } X < \lambda \end{cases}$$

Donc $\mathbb{1}_{X \geq \lambda} \leq \frac{X}{\lambda}$ (car X est à valeurs ≥ 0), donc $E[\mathbb{1}_{X \geq \lambda}] \leq E[\frac{X}{\lambda}]$
Mais $E[\frac{X}{\lambda}] = E[\frac{1}{\lambda} X] = \frac{1}{\lambda} E[X]$ par linéarité de l'espérance

$$\text{Donc } P(X \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda} E[X]$$

Rq Si X est intégrable, $\forall \lambda > 0, \underbrace{P(|X| \geq \lambda)}_{\text{"}} \leq \frac{E[|X|]}{\lambda}$
 $P(X \geq \lambda \text{ ou } X \leq -\lambda) = P(X \geq \lambda) + P(X \leq -\lambda)$

Inégalité de B-T:

Si X est de carrée intégrable
 $\forall \varepsilon > 0, P(|X - E[X]| \geq \varepsilon) \leq \frac{\text{Var}(X)}{\varepsilon^2}$

pr $|X - E[X]| \geq \varepsilon \Leftrightarrow (X - E[X])^2 \geq \varepsilon^2$
Donc $P(|X - E[X]| \geq \varepsilon) = P((X - E[X])^2 \geq \varepsilon^2) \leq \frac{E[(X - E[X])^2]}{\varepsilon^2}$
par l'inégalité de Markov.

Wims devoir (à rendre avant dimanche Janvier 22h)

Si X est salaire
d'une personne

$$P(X \geq 2E[X]) \leq \frac{1}{2}$$

traduction:

C'est impossible pour
plus qu'une moitié
de population de gagner
plus que 2 moyennes
car sinon, la moyenne
serait plus grande.

Inégalité de Markov:

Si X est une v.a. à valeurs ≥ 0 ,
 $\forall t > 0, P(X \geq t) \leq \frac{E[X]}{t}$

Inégalité de B-T:

Si X est une v.a. de carré intégrable
 $\forall \varepsilon > 0, P(|X - E[X]| \geq \varepsilon) \leq \frac{\text{Var}(X)}{\varepsilon^2}$

Théorème fondamental: Loi (faible) de Grands Nombres

Soient $X_1, \dots, X_n$ une suite de v.a. indépendantes
et de même loi et de carré intégrable.

Soit $\bar{X}_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$ la moyenne empirique.

Alors $\bar{X}_n$ tend vers $E[X_1]$ quand n tend vers $+\infty$:

$$\forall \varepsilon > 0, P(|\bar{X}_n - E[X_1]| \geq \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Rq: * $P(|X_n - E[X_1]| \geq \varepsilon), n \geq 1$ est une suite de réels.

* $\bar{X}_n, n \geq 1$, est une suite de v.a.s. Que veut dire convergence?

Ici: convergence en probabilité

(Déjà vu pour les approximations de loi: la convergence en loi)

Autre type de convergence: convergence presque sûre
(loi forte des grands nombres)

* Théorème incroyable: Fait un lien entre deux choses différents:
moyenne empirique et espérance.

⚠ ne pas confondre moyenne empirique et espérance.

La moyenne empirique fonction des résultats de l'expérience
l'espérance de la loi.

Ex: $X_1, \dots, X_n$ indépendantes et de même loi $\mathcal{B}(p)$
 $\bar{X}_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$ se calcul sans connaître p . $E[X_1] = p$

* Généralisation à des suites de v.a.s plus générales

pr: $\bar{X}_n$ est de carré intégrable, donc intégrable.

$$\begin{aligned} E[\bar{X}_n] &= E\left[\frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)\right] = \frac{1}{n}(E[X_1] + \dots + E[X_n]) \text{ (linéarité de } E) \\ &= \frac{1}{n}(E[X_1] + \dots + E[X_1]) \text{ (car les } X_i \text{ ont même loi, donc } E[X_i] = E[X_1] \text{ } \forall i) \\ &= E[X_1] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(\bar{X}_n) &= \text{Var}\left(\frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)\right) = \frac{1}{n^2} \text{Var}(X_1 + \dots + X_n) = \frac{1}{n^2}(\text{Var}(X_1) + \dots + \text{Var}(X_n)) \\ &= \frac{1}{n^2}(\text{Var}(X_1) + \dots + \text{Var}(X_1)) \text{ car les v.a.s sont indep. } \\ &\quad \text{car les v.a.s ont m loi donc m variance} \end{aligned}$$

$$\text{Var}(\bar{X}_n) = \frac{\text{Var}(X_1)}{n}$$

Puis par l'inégalité de B-T:

$$\forall \varepsilon > 0, 0 \leq P(|\bar{X}_n - E[X_1]| \geq \varepsilon) \leq \frac{\text{Var}(X_1)}{n \varepsilon^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$