



$\mathbb{Z}$ dénombrable

Espérance de X : si X à valeurs positives:

$$E[X] = \sum_x x P(X=x): \text{ c'est fini ou infini}$$

le résultat ne dépend pas de l'ordre de termes

$\rightarrow$ On dit que X est intégrable si $E[|X|] < +\infty$
et alors $E[X] = \sum_x x P(X=x)$ (c'est fini et le résultat ne dépend pas de l'ordre des termes)

Loi de Poisson (suite)

Prop Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ et si X et Y
sont des var. al. indép.,
Alors, $X+Y \sim \mathcal{P}(\lambda+\mu)$

Ex. avec le comptage d'individus d'espèces rares.

Pr. On veut démontrer que $\forall k \in \mathbb{N}, P(X+Y=k) = \frac{(\lambda+\mu)^k}{k!} e^{-(\lambda+\mu)}$

Soit $k \in \mathbb{N}$, $P(X+Y=k) = P(\exists i \in \{0, \dots, k\}: X=i \text{ et } Y=k-i)$

$$\begin{aligned} P(X+Y=k) &= \bigcup_{0 \leq i \leq k} [(X=i) \cap (Y=k-i)] \quad \bigcup_{0 \leq i \leq k} P[(X=i) \cap (Y=k-i)] = \\ &\quad \text{car les événements } (X=i) \cap (Y=k-i) \text{ et } (X=i_2) \cap (Y=k-i_2) \text{ sont disjoints lorsque } i_1 \neq i_2 \\ &= \sum_{i=0}^k P(X=i) \cdot P(Y=k-i) \quad \text{car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes.} \\ &= \sum_{i=0}^k \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} \cdot \frac{\mu^{k-i}}{(k-i)!} e^{-\mu} \\ &= \frac{e^{-\lambda} \cdot e^{-\mu}}{k!} \sum_{i=0}^k \frac{k!}{i!(k-i)!} \lambda^i \mu^{k-i} \\ &\quad = \frac{(\lambda+\mu)^k}{k!} \quad (\text{formule du binôme}) \\ &= \frac{(\lambda+\mu)^k}{k!} e^{-(\lambda+\mu)} \end{aligned}$$