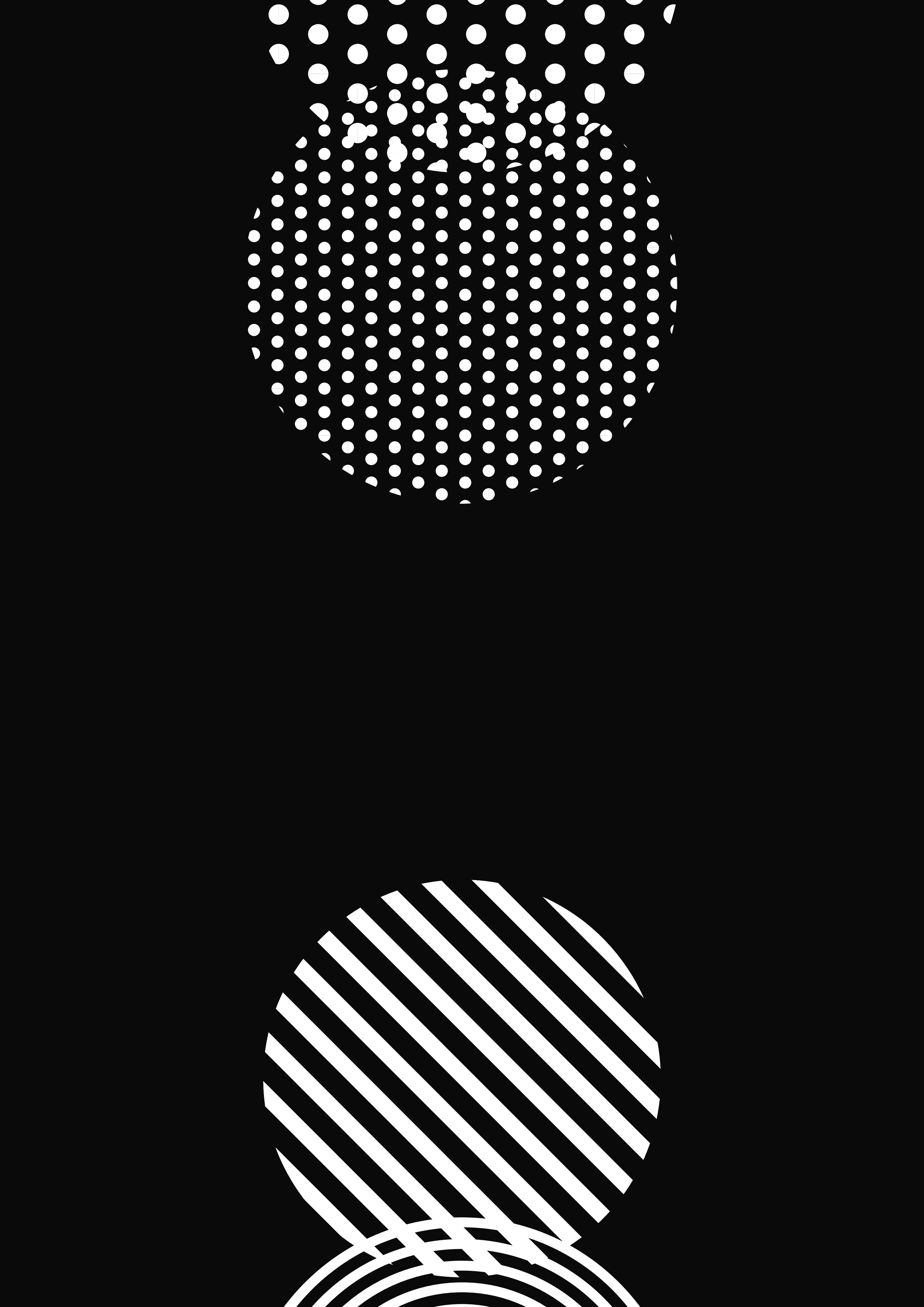

Dénombrable = infini mais comptable i.e en bijection avec $\mathbb{N}$

Probabilité sur Ω dénombrable

Soit Ω fini ou dénombrable
une probabilité P sur Ω est $P : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0,1]$ tq
- $P(\Omega) = 1$
- Si $(A_i)_{i\in I}$ est une partition de $A \subset \Omega$, $P(A) = \sum_{i\in I} P(A_i)$

⚠ donner un sens à $\sum_{i\in I}$ si I dénombrable

I n'est pas forcément ordonné
"famille sommable (voir poly)
$(f(x))_{x\in X}$ est une famille sommable si

$$\sup \{ \sum_{x\in A} |f(x)|, \quad A \text{ fini} \subset X \} < +\infty$$

On peut alors définir $\sum_{x\in X} f(x) = \sum_{x\in X_+} f(x) - \sum_{x\in X_-} (-f(x))$

où $X_+ = \{x, f(x) \geq 0\}$ et $X_- = \{x, f(x) \leq 0\}$

Avec $\sum_{x\in X_+} f(x) = \sup \{ \sum_{x\in A} f(x), A \text{ fini} \subset X_+ \}$ et idem pour

(revient à considérer des séries absolument convergentes si X est dénombrable)
pour lesquelles on peut changer l'ordre des termes dans la somme

---

- Un germe de proba p sur Ω
  $p : \Omega \longrightarrow [0,1]$

- Toute proba P sur Ω est associée (bijection) à un germe de proba sur Ω de sorte que si $A \subset \Omega$, $P(A) = \sum_{\omega\in A} p(\omega)$

X v.a $\quad X : \Omega \longrightarrow E$

si Ω est fini ou dénombrable, E est fini ou dénombrable

Loi de X: $P(X = x), x \in E$ définit une probabilité sur E

v.a. indép. : tout pareil

Espérance de X

On dit que X a une espérance si $\sum_{w\in\Omega} |X(w)|\,p(w)$ est fini

et $E[X] = \sum_{w\in\Omega} X(w)\,p(w)$

on alors $E[X] = \sum_{x\in E} x\,P(X=x)$

On a toujours la linéarité de l'espérance

loi géométrique

prop. Si $T \sim g(p)$, $E(T) = \frac{1}{p}$

pv $\sum_{k=1}^{+\infty} k P(T=k) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\cdot p(1-p)^{k-1}$

$\left(\sum_{k=1}^{+\infty} x^k\right)' = \sum_{k=1}^{+\infty} k x^{k-1}$, pour $|x|<1$

$= \left(\frac{1}{1-x} - 1\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$

En prenant $x = 1-p$ $\quad 0 \le x < 1$ (car $0 < p \le 1$)

$\sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^{k-1} = \frac{1}{p^2}$

La loi géométrique est sans mémoire : si $T \sim g(p)$,
$\forall k \ge 1$, si $\ell \ge 1$, $P(T=k+\ell \mid T>k) = p(1-p)^{\ell-1}$

pv: $P(T=k+\ell \mid T>k) = \frac{P(T=k+\ell \text{ et } T>k)}{P(T>k)} = \frac{P(T=k+\ell)}{P(T>k)}$ car $(T=k+\ell) \subset (T>k)$

$= \frac{p(1-p)^{k+\ell-1}}{(1-p)^k} = p(1-p)^{\ell-1}$

$P(T>k) = 1 - P(T \le k) = 1 - \sum_{i=1}^{k} P(T=i) = 1 - \sum_{i=1}^{k} p(1-p)^{i-1}$

$= 1 - p\cdot\sum_{j=0}^{k-1} (1-p)^j = 1 - \cancel{p}\,\frac{1-(1-p)^k}{\cancel{1-(1-p)}} = (1-p)^k$

$= \sum_{i>k} P(T=i) = \sum_{i=k+1}^{+\infty} p(1-p)^{i-1} = p\cdot\sum_{j=k}^{+\infty} (1-p)^j = p(1-p)^k \underbrace{\sum_{j=k}^{+\infty} (1-p)^{j-k}}_{\sum_{\ell=0}^{+\infty} (1-p)^{\ell} \,=\, \frac{1}{1-(1-p)}}$

λ - "rate" parameter

used for events where we have a large # of trials but small probability of success.

Loi de Poisson (loi dite des évènements rares) de paramètre $\lambda > 0$ notée $\mathcal{P}(\lambda)$

Soit T v.a. sur $\mathbb{N}$ suit la loi $\mathcal{P}(\lambda)$ ssi

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(T=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$q : \mathbb{N} \longrightarrow [0,1]$$
$$k \longmapsto q(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

q est un germe de proba sur $\mathbb{N}$:

En effet $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!}}_{e^{\lambda}} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = e^0 = 1$

$$\boxed{\text{Si } T \sim \mathcal{P}(\lambda), \quad E[T] = \lambda}$$

: dit à la fois que T a une espérance et donne sa valeur.

pv: $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \sum_{k=1}^{+\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = e^{-\lambda} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{l+1}}{l!}$

$\displaystyle = \lambda e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{l=0}^{+\infty} \frac{\lambda^l}{l!}}_{e^{\lambda}} = \lambda$

Thm: Si pour tout $n \geq 1$, $X_n \sim \mathcal{B}(n, p_n)$ tq

$$\lim_{n \to +\infty} n p_n = \lambda > 0$$

Alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} P(X_n = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

(X_n converge en loi vers une var. de loi $\mathcal{P}(\lambda)$)

?

En pratique: si n grand et p petit, $\mathcal{B}(n,p) \underset{\text{approximation}}{\approx} \mathcal{P}(np)$

$\underline{P_V}$: $\forall k \in \mathbb{N}$, si $n \geq k$ $P(X_n = k) = \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k}$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} p_n^k (1-p_n)^{n-k}$$

$$= \frac{(np_n)^k}{k!} \cdot \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{\underbrace{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}_{k \text{ fois}}} (1-p_n)^{n-k}$$

k fixé $\lim_{n \to +\infty} (np_n)^k = \lambda^k$

$$\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} = \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n}\right)}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 1}\underbrace{\left(1 - \frac{2}{n}\right)}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 1} \dots \underbrace{\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$$

$(1-p_n)^{n-k}$ qd $n \to +\infty$? $\quad p_n = \frac{np_n \to \lambda}{n \to +\infty} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

produit de termes qui tendent vers 1, mais dont le nombre tend vers l'infini:

$$(1-p_n)^{n-k} = \exp\{\log[(1-p_n)^{n-k}]\}$$

$\log[(1-p_n)^{n-k}] = (n-k)\log(1-p_n) = (n-k)(-p_n + o(p_n))$ car $p_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

$$= -(np_n + kp_n) + o(np_n) = \underbrace{-\lambda + o(1)}_{-np_n} + \dots + o(1)$$

$$\xrightarrow[n \to +\infty]{} -\lambda$$

Comme exp continue $(1-p_n)^{n-k} \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^{-\lambda}$