



Loi géométrique

indépendantes identiquement distribuées
= même loi

On considère $X_1, \dots, X_n, \dots$ i.i.d de loi $\mathcal{B}(p), p > 0$
Soit T v.a. : 1^{ère} fois où l'on obtient 1

$$T = \inf_{\min} \{j : X_j = 1\}$$

$$\text{Si } k \in \mathbb{N}, \quad (T = k) = (X_k = 1 \text{ et } X_i = 0 \quad \forall i < k)$$

$$\begin{aligned} P(T = k) &= P(X_k = 1 \text{ et } X_i = 0 \quad \forall i < k) \\ &\stackrel{\text{indépendants}}{=} P(X_k = 1) \cdot P(X_{k-1} = 0) \cdot P(X_{k-2} = 0) \cdot \dots \cdot P(X_1 = 0) \\ &= p \cdot \underbrace{(1-p) \cdot (1-p) \cdot \dots \cdot (1-p)}_{k-1 \text{ fois}} \\ &= p(1-p)^{k-1} \end{aligned}$$

A-t-on toutes les valeurs possibles de T en considérant tous les entiers $k > 0$?

Oui si $\sum_{k \in \mathbb{N}} P(T = k) = 1$
on considère l'ordre $\rightarrow$ on considère par d'ordre

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} P(T = k) &= \sum_{k=1}^{\infty} p \cdot (1-p)^{k-1} \\ &= p \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} \\ &= p \cdot \underbrace{\sum_{l=0}^{\infty} (1-p)^l}_{\frac{1}{1-(1-p)}} = 1 \\ &= \frac{1}{1-(1-p)} = \frac{1}{p} \end{aligned}$$

Loi géométrique $g(p), p > 0$

Si T est une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, $T \sim g(p)$

si $\forall k \geq 1, P(T = k) = p(1-p)^{k-1}$

C'est une probabilité sur $\mathbb{N}^*$!

Negative Binomiale

$X \sim NB(r, p)$ number of failures before r th success
in a sequence of independent Bernoulli trials.

with p success probability

$$P(X=k) = \binom{r+k-1}{k} (1-p)^k p^r$$

Annotations for the formula:
- Above $r+k-1$: $r+k$ events, the last one which r th success
- Below k : failure proba k times
- Below $(1-p)^k$: failure proba
- Below p^r : success proba r times

$$E[X] = \frac{r(1-p)}{p}$$

$$\text{Var}(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}$$