



* v.a. indépendantes. $\Leftrightarrow$ la loi jointe est le produit des lois marginales

Et conséquences

Par exemple: si $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires

si $p \leq n$

$(X_1, \dots, X_p)$ et $(X_{p+1}, \dots, X_n)$ sont des v.a. indépendantes

et par exemple $X_1 + \dots + X_p$ est une v.a. indépendante de $X_{p+1} + \dots + X_n$

* Si $X \sim B(n, p)$

et si $X_1, \dots, X_n$ sont n v.a. indépendantes de loi $B(p)$

Alors, $X_1 + \dots + X_n$ a même loi que X

Prop: Si $S_1 \sim B(n_1, p)$ et $S_2 \sim B(n_2, p)$ et si S_1 et S_2 sont des v.a. indépendantes
alors $S_1 + S_2 \sim B(n_1 + n_2, p)$ Δ même pas

pr: Si $X_1, \dots, X_{n_1}, Y_1, \dots, Y_{n_2}$ sont des v.a. indépendantes de loi $B(p)$, alors:

• $X_1 + \dots + X_{n_1}$ et $Y_1 + \dots + Y_{n_2}$ sont des v.a. indép.

• $X_1 + \dots + X_{n_1}$ a même loi que S_1 et $Y_1 + \dots + Y_{n_2}$ a même loi que S_2

Donc la loi de $(X_1, \dots, X_{n_1}, Y_1, \dots, Y_{n_2})$ est la même que la loi de (S_1, S_2)
(c'est $B(n_1, p) \otimes B(n_2, p)$)

Donc la loi de $S_1 + S_2$ est la même que la loi de $X_1 + \dots + X_{n_1} + Y_1 + \dots + Y_{n_2}$
qui est $B(n_1 + n_2, p)$

Loi hypergéométrique (loi des tirages sans remise)

On considère une population de N individus, parmi lesquelles G
on tire caractéristique particulière.

On fait un tirage sans remise de n individus parmi ces N $G \leq N$

On s'intéresse au nombre X d'individus parmi les n qui ont la caractérist.

$\Omega = \{ \text{ss-ens } Z \text{ de } \{1, \dots, N\} \text{ de cardinal } n \}$

P probabilité uniforme, c-à-d si $A \subset \Omega$, $P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$

$\forall \omega \in \Omega$ $P(\{\omega\}) = \frac{1}{\# \Omega} = \frac{1}{\binom{N}{n}} = p(\omega)$ p mesure de P

$X: \Omega \rightarrow E$

$\omega \mapsto X(\omega)$: nbre d'éléments dans ω qui ont la caractéristique

Loi de X ? $E = \{0, 1, \dots, n\}$ et pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$ $P(X=k) = ?$

L'événement $X=k$, c'est quoi? On notera C l'ensemble des gauchers de la population.

$$(X=k) = \{\omega \in \Omega \text{ tq } \#(\omega \cap C) = k\} \quad P(X=k) = \frac{\#(X=k)}{C_N^n}$$

Pour obtenir k gauchers dans l'échantillon (sans remise) de n individus, c'est que ces k viennent et les autres $n-k$ viennent de $\{1, \dots, N\} \setminus C$, et chaque tirage de k parmi les G peut être combiné avec un des tirages des $n-k$ parmi les $N-G$ pour obtenir un tirage de n .

$$\#(X=k) = C_G^k \cdot C_{N-G}^{n-k} \quad (*)$$

$$\text{donc } P(X=k) = \frac{C_G^k \cdot C_{N-G}^{n-k}}{C_N^n}$$

rv de (*)

$$(X=k) = \{\omega \text{ tq } \omega = \omega_1 \cup \omega_2 \text{ où } \omega_1 \subset C \text{ et } \# \omega_1 = k \\ \text{et } \omega_2 \in \{1, \dots, N\} \setminus C \text{ et } \# \omega_2 = n-k\}$$

$$\text{Si } \Omega_1 = \{\omega_1 \subset C \text{ tq } \# \omega_1 = k\} \text{ et } \Omega_2 = \{\omega_2 \subset \bar{C} \text{ tq } \# \omega_2 = n-k\}$$

$$(X=k) = \{\omega = \omega_1 \cup \omega_2 \text{ où } \omega_1 \in \Omega_1 \text{ et } \omega_2 \in \Omega_2\}$$

est en bijection avec $\Omega_1 \times \Omega_2$

$$\text{Si } f: (X=k) \longrightarrow \Omega_1 \times \Omega_2 \\ \omega \longmapsto f(\omega) = (\omega \cap C, \omega \cap \bar{C})$$

(exercice: montrer que f est bijective)

$$\text{Donc } \#(X=k) = \#(\Omega_1 \times \Omega_2) = \#(\Omega_1) \cdot \#(\Omega_2)$$

Def: X suit la loi hypergéométrique de paramètres (N, G, n) noté $HL(N, G, n)$ si pour tout entier k

$$P(X=k) = \frac{C_G^k \cdot C_{N-G}^{n-k}}{C_N^n}$$

Convention: $C_n^p = 0$ si $p < 0$ ou $p > n$

Que vaut $E(X)$?

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) X(\omega) = \sum_k k P(X=k)$$

Soit, pour tout $c \in C$, soit X_c la v.a. qui vaut 1 si c est dans l'échantillon et 0 sinon

$$X_c: \Omega \longrightarrow \{0, 1\}$$
$$\omega \longmapsto X_c(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } c \in \omega \\ 0 & \text{si } c \notin \omega \end{cases}$$

$$\text{Alors } X = \sum_{c \in C} X_c \quad X(\omega) = \#(C \cap \omega) = \sum_{c \in C} 1_{\omega}(c)$$

Donc $E(X) = \sum_{c \in C} E(X_c)$ par linéarité de l'espérance.

X_c suit la loi $\mathcal{B}(p_c)$ où $p_c = P(X_c = 1)$ et alors $E(X_c) = p_c$
donc $E(X) = \sum_{c \in C} p_c$

Mais $(X_c = 1) = \{\omega \text{ tq } c \in \omega\}$ donc $\#(X_c = 1) = C_{N-1}^{n-1}$

$$\text{Donc } P(X_c = 1) = \frac{C_{N-1}^{n-1}}{C_N^n} = \frac{\frac{(N-1)!}{(n-1)!(N-n)!}}{\frac{N!}{n!(N-n)!}} = \frac{n! (N-1)!}{(n-1)! N!} = \frac{n}{N}$$

Prop: si $X \sim \mathcal{H}(N, G, n)$, $E(X) = \frac{nG}{N}$

Rq: Si on fait un tirage avec remise de n parmi N
et puis Z compte le nbre de gagnants parmi les n
Alors, $Z \sim \mathcal{B}(n, \frac{G}{N})$ et $E(Z) = \frac{nG}{N}$

Approximation de la loi $\mathcal{H}(N, G, n)$ par $\mathcal{B}(n, p)$ où $p = \frac{G}{N}$
quand $n \ll N$:

Thm: Soit n fixé et $p \in [0, 1]$.

Soit $(N_j)_{j \geq 1}$ et $(G_j)_{j \geq 1}$ des suites d'entiers tq $1 \leq G_j \leq N_j$ et $N_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} +\infty$
et $\frac{G_j}{N_j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} p$

$$\text{Alors pour tout } k, \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{C_{G_j}^k \cdot C_{N_j - G_j}^{n-k}}{C_{N_j}^n} = C_N^k p^k (1-p)^{n-k}$$

p.v: Soit k un entier $0 \leq k \leq n$

$$\frac{C_{G_j}^k \cdot C_{N_j - G_j}^{n-k}}{C_{N_j}^n} = \frac{\frac{G_j!}{k!(G_j-k)!} \cdot \frac{(N_j - G_j)!}{(n-k)!(N_j - G_j - n + k)!}}{\frac{N_j!}{n!(N_j - n)!}}$$

$$= C_n^k \cdot \frac{G_j(G_j-1) \dots (G_j-k+1)}{N_j(N_j-1) \dots (N_j-k+1)} \cdot \frac{(N_j - G_j) \dots (N_j - G_j - n + k + 1)}{(N_j - k) \dots (N_j - n + 1)}$$

$$\frac{G_j(G_j-1) \dots (G_j-k+1)}{N_j(N_j-1) \dots (N_j-k+1)} = \left(\frac{G_j}{N_j}\right)^k \cdot \frac{(1 - \frac{1}{N_j}) \dots (1 - \frac{k-1}{N_j})}{(1 - \frac{1}{N_j})(1 - \frac{2}{N_j}) \dots (1 - \frac{k-1}{N_j})}$$

$$\frac{G_j}{N_j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} p \quad \text{donc} \quad \left(\frac{G_j}{N_j}\right)^k \xrightarrow{j \rightarrow \infty} p^k$$

• Si $p=0$ la formule est vraie

• Si $p>0$: $G_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \frac{1}{G_j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$ donc $(1 - \frac{1}{G_j}) \dots (1 - \frac{k-1}{G_j}) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 1$

$$\text{Donc dans tous les cas} \quad \frac{G_j(G_j-1) \dots (G_j-k+1)}{N_j(N_j-1) \dots (N_j-k+1)} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} p^k$$

Pour finir: