



Variables aléatoires

Soit Ω (fini) et P probabilité sur Ω , (mesurable)
Une variable aléatoire X est une fonction de Ω
dans un autre ensemble.

Ex: on lance 2 dés $\Omega = E_6 \times E_6$ et P : proba uniforme sur Ω
la variable aléatoire X : somme des 2 dés

$$X: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\omega = (\omega_1, \omega_2) \longmapsto X(\omega) = \omega_1 + \omega_2$$

mesurable?

$X(\Omega)$ est un ensemble fini

$$\text{Pour } x \in X(\Omega), \quad X^{-1}(\{x\}) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}$$

$$\text{Ex(suivante): } X(\Omega) = \{2, \dots, 12\}$$

$$X^{-1}(\{7\}) = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$$

$$\text{Et si } A \subset X(\Omega), \quad X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}$$

$$\text{Ex (suivante): "la somme des dés est paire"} \quad A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$$

$$X^{-1}(A) = \{(\omega_1, \omega_2) \in E_6 \times E_6 : \omega_1 + \omega_2 \in A\}$$

$$\text{Pour tout } x \text{ de } X(\Omega), \text{ on peut définir } p_x(x) = P(X^{-1}(\{x\}))$$

$$\text{Ex (suivante): } p_x(7) = P(\{(1,6), (2,5), \dots, (5,2), (6,1)\}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$\text{Déf: } p_x: X(\Omega) \longrightarrow [0, 1]$$

$$x \longmapsto p_x(x) = P(X^{-1}(\{x\})) = \sum_{\omega: X(\omega)=x} p(\omega) \text{ où } p \text{ le germe de } P$$

Prop: p_x est un germe de probabilité sur $X(\Omega)$, P_x
sa probabilité sur $X(\Omega)$ est appelée loi de X

p.v.: (On doit montrer que $\sum_{x \in X(\Omega)} p_x(x) = 1$)

$$\text{On a } \sum_{x \in X(\Omega)} p_x(x) = \sum_{x \in X(\Omega)} \left(\sum_{\omega: X(\omega)=x} p(\omega) \right)$$

les événements $A_x, x \in X(\Omega)$, forme une partition de Ω
où A_x est l'événement $A_x = X^{-1}(\{x\}) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}$

En effet si $x_1 \neq x_2$ sont des éléments de $X(\Omega)$
 $A_{x_1} \cap A_{x_2} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x_1 \text{ et } X(\omega) = x_2\} = \emptyset$
 si $x \in X(\Omega), \exists \omega \in \Omega$ tq $X(\omega) = x$, donc $A_x \neq \emptyset$
 $\forall \omega \in \Omega, \exists x \in X(\Omega)$ tq $\omega \in A_x$
 Donc $\Omega \subset \bigcup_{x \in X(\Omega)} A_x$

Par ailleurs, $\forall x \in X(\Omega), A_x \subset \Omega$
 ainsi, $\bigcup_{x \in X(\Omega)} A_x \subset \Omega$, donc $\bigcup_{x \in X(\Omega)} A_x = \Omega$

Donc $\sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{\omega \in A_x} p(\omega) = \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$ car p est un germe de probabilité.

la loi de X est caractérisée par $X(\Omega)$ et les $p_x(x), x \in X(\Omega)$

Ex (suite): la loi de la somme de 2 dés est caractérisée par:

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p_x	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	...	...	...	$\frac{1}{6}$	...	...	...	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

la loi de X est $P_x: \mathcal{P}(X(\Omega)) \longrightarrow [0, 1]$

$$A \longmapsto P_x(A) = \sum_{x \in A} p_x(x)$$

?

Notation: Si $A \subset \mathcal{P}(X(\Omega))$, on note $(X \in A)$ l'événement
 $X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}$
 $P(X \in A) = P_x(A)$
 $(X \in A) \cap (X \in B)$ a un sens

Ex (suite): $A = \{11, 12\}$ $P_x(A) = \frac{2}{36} = \frac{1}{12}$

L'événement "la somme des dés est supérieure ou égale à 11"
 c'est A dans $X(\Omega)$, ou $(X \geq 11)$, dans Ω

Espérance d'une variable aléatoire X :

Valeur "moyenne" de X (relativement à la loi de X)

Soit $X: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

Son espérance, notée $E(X)$ est le nombre réel $E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x p_X(x)$
(Abus de notation: on peut convenir que $p_X(x) = 0$ si $x \in \mathbb{R} \setminus X(\Omega)$ et écrire
 $E(X) = \sum_{x \in \mathbb{R}} x p_X(x)$)

Prop: $E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) p(\omega)$

pv:
$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x \in X(\Omega)} x p_X(x) = \sum_{x \in X(\Omega)} x P(X=x) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \left(\sum_{\omega \in \Omega: X(\omega)=x} p(\omega) \right) \\ &= \sum_{x \in X(\Omega)} \left(\sum_{\omega \in \Omega: X(\omega)=x} X(\omega) p(\omega) \right) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) p(\omega) \text{ car les événements } \\ &\quad (X=x), x \in X(\Omega) \text{ forment une partition de } \Omega \end{aligned}$$

Propriété: • Linéarité de l'espérance

Si $\lambda \in \mathbb{R}$, λX est une variable aléatoire
 $(\lambda X): \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$
 $\omega \longmapsto (\lambda X)(\omega) = \lambda \cdot X(\omega)$

$$E(\lambda X) = \lambda \cdot E(X) \quad (\text{preuve l'écrire en utilisant la prop.})$$

Si X et Y sont deux variables aléatoires, $X+Y$ est une variable aléatoire

$$\begin{aligned} X+Y: \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\longmapsto (X+Y)(\omega) = X(\omega) + Y(\omega) \end{aligned}$$

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y) \quad (\text{preuve l'écrire})$$

• l'espérance conserve l'ordre

Si m et M sont deux réels et $m \leq X \leq M$
(i.e. $\forall \omega \in \Omega, m \leq X(\omega) \leq M$)

$$\text{Alors } m \leq E(X) \leq M$$

pv: $\forall \omega \in \Omega, m \leq X(\omega) \leq M$ donc $p(\omega)m \leq X(\omega)p(\omega) \leq p(\omega)M$ car $p(\omega) \geq 0$
Donc $m = \sum_{\omega \in \Omega} m p(\omega) \leq \underbrace{\sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) p(\omega)}_{E(X)} \leq \sum_{\omega \in \Omega} M p(\omega) = M$

Rq: • vocabulaire

- Si Z est telle que $\forall \omega \in \Omega, Z(\omega) = m$, on dit que Z est la variable aléatoire constante et égale à m
- $E(X)$ ne dépend que de la loi de X

Quelques lois importantes

① Loi uniforme on dit que X suit la loi uniforme sur E si: $X(\Omega) = E$ et P_X est la probabilité uniforme sur E . Si $A \subseteq E, P_X(A) = \frac{\#A}{\#E}$

② La loi de Bernoulli de paramètre $p, p \in [0, 1]$ notée $B(p)$

On dit que X suit la loi $B(p)$ et on note $X \sim B(p)$ si $X(\Omega) = \{0, 1\}$ et $P(X=0) = 1-p, P(X=1) = p$
ou encore $P_X(1) = p, P_X(0) = 1-p$

Existe: Si $A \subseteq \Omega, I_A$ est une variable aléatoire de loi $B(\quad)$ car en notant $X = I_A, P_X(\{1\}) = P(\{\omega: X(\omega)=1\}) = P(\{\omega: \omega \in A\}) = P(A) = P(X=1)$

③ Loi Binomiale de paramètres n (entier ≥ 1) et $p, p \in [0, 1]$, notée $Bin(p, n)$

(la loi du nombre de succès p et on a n répétitions indépendantes d'expériences à 2 issues, où le succès a probabilité p)

Si $X \sim B(n, p), X$ prend ses valeurs dans $\{0, 1, \dots, n\}$ et $\forall k \in \{0, 1, \dots, n\}, P(X=k) = p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

$\Omega = \{(\omega_1, \dots, \omega_n) \mid \forall i \in \{1, \dots, n\}, \omega_i \in \{0, 1\}\} = \{0, 1\}^n = \underbrace{\{0, 1\} \times \dots \times \{0, 1\}}_{n \text{ fois}}$

$$P = \underbrace{B(p) \otimes \dots \otimes B(p)}_{n \text{ fois}}$$

$$X: \Omega \longrightarrow \{0, 1, \dots, n\}$$
$$\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \longmapsto X(\omega) = \sum_{i=1}^n \omega_i$$

Calcul de la loi de X : à suivre

- Variable aléatoire

- Loi P_X d'une variable aléatoire

→ l'ensemble des valeurs E prises par X (souvent $E \subset \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^d$)
(E fini (plus tard dénombrable)) (mais ça peut être autre chose)

→ les probabilités $P(X=x)$, $x \in E$
 $= P_X(\{x\}) = p_x$ germe de X

- Espérance de X $E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) X(\omega)$ p germe de P
 $= \sum_{x \in E} x p_X(x)$

L'espérance de X ne dépend que de la loi de X

- Si $f: E \rightarrow F$, $f \circ X: \Omega \rightarrow F$ c'est une variable aléatoire que l'on peut noter $f(X)$

$$E[f(X)] = \sum_{\omega \in \Omega} f \circ X(\omega) p(\omega) = \sum_{x \in E} f(x) p_X(x) = \sum_{y \in f(E)} y P_{f(X)}(y),$$

$P_{f(X)}$: germe de la loi de $f(X)$

→ v.a. constante $X \sim \delta_a$: $P(X=a) = 1$ et $E(X) = a$

→ loi uniforme sur E : $X \sim \text{Unif}(E)$ $E(X) = \frac{1}{\#E} \sum_{x \in E} x$
(la moyenne des valeurs de E)

→ S $X \sim \mathcal{B}(p)$, $E(X) = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p$

→ S $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, $\forall k \in \{0, 1, \dots, n\}$, $P(X=k) = C_n^k \cdot p^k (1-p)^{n-k}$
 $E(X) = np$

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^n k \cdot C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^n k C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \\ &= np \sum_{k=1}^n k \cdot \frac{(n-1)!}{k!(n-k)!} \cdot p^{k-1} (1-p)^{n-k} = np \sum_{l=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{l!(n-1-l)!} p^l (1-p)^{n-1-l} \\ &= np \underbrace{\sum_{l=0}^{n-1} C_{n-1}^l p^l (1-p)^{n-1-l}}_{(p+(1-p))^{n-1}} = np \end{aligned}$$

$\Omega = \{0, 1\}^n$ $P = \mathcal{B}(p) \otimes \dots \otimes \mathcal{B}(p)$ l'indépendance des éléments
 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) \in \Omega$ succès / échec dans la suite
 $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \omega_i \in \{0, 1\}$ des expériences

$$X: \Omega \longrightarrow \{0, 1, \dots, n\}$$

$$\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \longmapsto X(\omega) = \sum_{i=1}^n \omega_i$$

$$(X=k) = \{ \omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \{0, 1\}^n \text{ tq } \sum_{i=1}^n \omega_i = k \}$$

$$p_X(k) = P(X=k) = P(\{ \omega \in \{0, 1\}^n \text{ tq } \sum_{i=1}^n \omega_i = k \})$$

$$= \sum_{(\omega_1, \dots, \omega_n) \in \{0, 1\}^n \text{ tq } \sum_{i=1}^n \omega_i = k} p(\omega_1, \dots, \omega_n)$$

Si q est la germe de $\mathcal{B}(p)$,
 $q(0) = 1-p$ et $q(1) = p$

$$= \sum_{(\omega_1, \dots, \omega_n) \in \{0, 1\}^n \text{ tq } \sum_{i=1}^n \omega_i = k} \frac{p(\omega_1) \cdot p(\omega_2) \cdot \dots \cdot p(\omega_n)}{= p^k (1-p)^{n-k}} \quad p(\omega_1, \dots, \omega_n) = q(\omega_1) \cdot q(\omega_2) \cdot \dots \cdot q(\omega_n)$$

(définition des probabilités produit)

$$= p^k (1-p)^{n-k} \cdot \# \{ (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \{0, 1\}^n \text{ tq } \sum_{i=1}^n \omega_i = k \}$$

C_n^k : cardinal de l'ensemble des parties à k éléments
 d'un ensemble à n éléments.

$$C_n^k = \# \{ Z \subset E_n \text{ tq } \# Z = k \}$$

en bijection avec $\{ (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \{0, 1\}^n \text{ tq } \sum_{i=1}^n \omega_i = k \}$

donc $\# \{ (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \{0, 1\}^n \text{ tq } \sum_{i=1}^n \omega_i = k \} = C_n^k$

Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ définissons $X_i: \Omega \longrightarrow \{0, 1\}$

$$(\omega_1, \dots, \omega_n) \longmapsto X_i(\omega) = \omega_i$$

quelle est la loi de X_i ? l'ensemble des valeurs de X_i est $\{0, 1\}$

Donc X_i suit une loi de Bernoulli

$$P(X_i = 1) = P(\{ (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \{0, 1\}^n \text{ tq } \omega_i = 1 \})$$

$$= \sum_{(\omega_1, \dots, \omega_n) \text{ tq } \omega_i = 1} q(\omega_1) \cdot q(\omega_2) \cdot \dots \cdot q(\omega_n) \quad \text{ou } q(\omega_i) = p$$

$$= p \sum_{(\omega_1, \dots, \omega_{i-1}, \omega_{i+1}, \dots, \omega_n)} q(\omega_1) \cdot \dots \cdot q(\omega_{i-1}) \cdot q(\omega_{i+1}) \cdot \dots \cdot q(\omega_n)$$

$$= p \cdot \left(\sum_{\omega_1} q(\omega_1) \right) \cdot \dots \cdot \left(\sum_{\omega_n} q(\omega_n) \right) = p$$

Donc $X_i \sim \mathcal{B}(p)$ et $X = X_1 + \dots + X_n$

carr $\forall (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \{0, 1\}^n \quad X(\omega_1, \dots, \omega_n) = X_1(\omega_1, \dots, \omega_n) + \dots + X_n(\omega_1, \dots, \omega_n)$

Par linéarité de l'espérance, $E(X) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n)$

$$= p + p + \dots + p = np$$

Variables aléatoires indépendantes

Def: Soient $X: \Omega \longrightarrow E$ et $Y: \Omega \longrightarrow F$ des variables aléatoires

On dit que X et Y sont des variables aléatoires indépendantes si pour tout $x \in E$ et pour tout $y \in F$, $P(X=x \text{ et } Y=y) = P(X=x) \cdot P(Y=y)$

Rq: Si A et B sont des événements indépendants, $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
Alors, 1_A et 1_B sont des variables aléatoires indépendantes.

Def: Si $X_1: \Omega \longrightarrow E_1, \dots, X_n: \Omega \longrightarrow E_n$, on dit que $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes ssi $\forall x_1, \dots, x_n \in E_1 \times \dots \times E_n$,

$$P(X_1=x_1 \text{ et } \dots \text{ et } X_n=x_n) = P(X_1=x_1) \cdot \dots \cdot P(X_n=x_n)$$

$$\{\omega \in \Omega: X_1(\omega)=x_1 \text{ et } \dots \text{ et } X_n(\omega)=x_n\}$$

$$\begin{aligned} P(X_1=x_1 \text{ et } \dots \text{ et } X_n=x_n) &= P(\{\omega \in \Omega: X_1(\omega)=x_1 \text{ et } \dots \text{ et } X_n(\omega)=x_n\}) \\ &= P(\{\omega \in \Omega: (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)) = (x_1, \dots, x_n)\}) \end{aligned}$$

$(X_1, \dots, X_n): \Omega \longrightarrow E_1 \times \dots \times E_n$ est une variable aléatoire
 $\omega \longmapsto (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$ à valeurs dans $E_1 \times \dots \times E_n$

le germe de la loi de $(X_1, \dots, X_n)$ est donné par les $p_{(X_1, \dots, X_n)}(x_1, \dots, x_n) =$

On appelle loi jointe de $X_1, \dots, X_n$ la loi de $(X_1, \dots, X_n)$ la loi d'un X_i est appelée loi marginale de X_i

Prop: $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes
ssi $p_{(X_1, \dots, X_n)} = p_{X_1} \otimes \dots \otimes p_{X_n}$

où $p_{(X_1, \dots, X_n)}$ est la loi de $(X_1, \dots, X_n)$ et p_{X_i} est la loi de X_i , $i \in \{1, \dots, n\}$

pv: Il suffit de montrer que si $p_{(X_1, \dots, X_n)}$ est le germe de $p_{(X_1, \dots, X_n)}$ et si p_{X_i} est le germe de p_{X_i} pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_n, p_{(X_1, \dots, X_n)}(x_1, \dots, x_n) = p_{X_1}(x_1) \cdot \dots \cdot p_{X_n}(x_n)$$

Mais $p_{(X_1, \dots, X_n)}(x_1, \dots, x_n) = P(X_1=x_1 \text{ et } \dots \text{ et } X_n=x_n)$ et $p_{X_i}(x_i) = P(X_i=x_i)$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$
Donc (E) est vraie car $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes.

Retour au modèle pour la loi Binomiale

On a vu $P_{X_i} = \mathcal{B}(p)$

Et aussi $P_{(X_1, \dots, X_n)} = \mathcal{B}(p) \otimes \dots \otimes \mathcal{B}(p)$ car $(X_1, \dots, X_n)(\omega_1, \dots, \omega_n) = (u_1, \dots, u_n)$

Donc $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes

Prop: La loi $\mathcal{B}(n, p)$ est la loi de la somme de n variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{B}(p)$

Prop: Si $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes,

si $A_1 \subset E_1, \dots, A_n \subset E_n$

Alors $P(X_1 \in A_1 \text{ et } \dots \text{ et } X_n \in A_n) = P(X_1 \in A_1) \cdot \dots \cdot P(X_n \in A_n)$

pv:

$$\begin{aligned} P(X_1 \in A_1 \text{ et } \dots \text{ et } X_n \in A_n) &= P(\{\omega \in \Omega : X_1(\omega) \in A_1, \dots, X_n(\omega) \in A_n\}) \\ &= P(\{\omega \in \Omega : (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)) \in A_1 \times \dots \times A_n\}) \\ &= P(\{\omega \in \Omega : (X_1, \dots, X_n)(\omega) \in A_1 \times \dots \times A_n\}) \\ &= P_{(X_1, \dots, X_n)}(A_1 \times \dots \times A_n) \quad \text{Mais } X_1, \dots, X_n \text{ sont indépendantes} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{(X_1, \dots, X_n)} &= \bigotimes_{i=1}^n P_{X_i} = (P_{X_1} \otimes \dots \otimes P_{X_n})(A_1 \times \dots \times A_n) \\ &= \prod_{i=1}^n P_{X_i}(A_i) \quad \text{Mais } P_{X_i}(A_i) = P(\{\omega : X_i(\omega) \in A_i\}) = P(X_i \in A_i) \end{aligned}$$

Prop: Si $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes

si $f_i: E_i \rightarrow F_i, i \in \{1, \dots, n\}$

Alors $f_1(X_1), \dots, f_n(X_n)$ sont des variables aléatoires indépendantes.

pv: Il suffit de montrer que $P_{(f_1(X_1), \dots, f_n(X_n))} = \bigotimes_{i=1}^n P_{f_i(X_i)}$

càd il suffit de montrer que $\forall (y_1, \dots, y_n) \in F_1 \times \dots \times F_n,$

$$P(f_1(X_1) = y_1 \text{ et } \dots \text{ et } f_n(X_n) = y_n) = \prod_{i=1}^n P(f_i(X_i) = y_i) \quad (E1)$$

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad \{f_i(X_i) = y_i\} = \{\omega : f_i \circ X_i(\omega) = y_i\}$$

$$\begin{aligned} &= X_i^{-1} [f_i^{-1}(\{y_i\})] \quad \xrightarrow{X_i \rightarrow E_i, f_i \rightarrow F_i} \\ &= \{X_i \in f_i^{-1}(\{y_i\})\} \quad (E2) \text{ est la conséquence} \end{aligned}$$