



$A \cap B \rightarrow$ whether A happen and B happen in the same time.
 $A \cap B^c$ whether A happen and B DOES NOT happen in the same time.

Probabilities from different sample spaces are independent.

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B) + P(A \cap B^c) \\ P(A \cap B) &= P(A) \cdot P(B) \\ P(A \cap B^c) &= P(A) - P(A \cap B) \\ &= P(A) - P(A) \cdot P(B) \\ &= P(A) \underbrace{(1 - P(B))}_{P(B^c)} \\ &= P(A) P(B^c) \end{aligned}$$

Donc si A, B indep.
 donc A, B^c indep. aussi

Ω ensemble fini muni d'une probabilité P

Soient $A \subset \Omega$ et $B \subset \Omega$

A and B both in the same sample space!

Déf: A et B sont indépendantsssi $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Prop: Si A et B sont indépendants, alors A et B^c sont indépendants.

Rq: Donc A et B indépendants $\Leftrightarrow A$ et B^c indépendants
 Donc A et B indep. $\Leftrightarrow A^c$ et B^c indep.

Ex: Soient Ω_1 et Ω_2 des ensembles finis,
 P_1 une probabilité sur Ω_1 et
 P_2 une probabilité sur Ω_2

Soit $P = P_1 \otimes P_2$ probabilité sur $\Omega_1 \times \Omega_2$

si $A \subset \Omega_1$ et $B \subset \Omega_2$, soit $\tilde{A} = A \times \Omega_2 \subset \Omega_1 \times \Omega_2$
 et $\tilde{B} = \Omega_1 \times B \subset \Omega_1 \times \Omega_2$

Alors $P(\tilde{A}) = P_1(A) \cdot P_2(\Omega_2) = P_1(A)$
 et $P(\tilde{B}) = P_1(\Omega_1) \cdot P_2(B) = P_2(B)$

$\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ sont des événements indep.s, car

$$\begin{aligned} \tilde{A} \cap \tilde{B} &= \{\omega \in \Omega_1 \times \Omega_2 \text{ tq } \omega \in \tilde{A} \text{ et } \omega \in \tilde{B}\} \\ &= \{(\omega_1, \omega_2) \mid \omega_1 \in \Omega_1 \text{ et } \omega_2 \in \Omega_2 \text{ tq } (\omega_1 \in A \text{ et } \omega_2 \in B)\} \\ &= \{(\omega_1, \omega_2) : \omega_1 \in A \text{ et } \omega_2 \in B\} \\ &= A \times B \end{aligned}$$

Donc $P(\tilde{A} \cap \tilde{B}) = P_1(A) \cdot P_2(B) = P(\tilde{A}) \cdot P(\tilde{B})$

Ex (suite): lancer de 2 dés. $\Omega = E_6 \times E_6$
 P -prob. uniforme sur Ω
 $P = P_1 \otimes P_2$ P_i probabilité sur E_6

Tout événement fini concerne que le résultat du 1^{er} dé est indep. de tout événement fini ne concerne que le résultat du 2^{ème} dé.

Q: Soit $A \subset \Omega$. A et A^c sont ils indépendants?
 intuition: non!

Maths: $A \cap A^c = \emptyset$ donc $P(A \cap A^c) = 0$ $P(A)P(A^c) = 0$ si $P(A) = 0$ ou $P(A) = 1$
 Donc si $0 < P(A) < 1$, A et A^c ne sont pas indep.

Rq: $\emptyset$ est indep. de tout événement
 Ω

Def: Soient A, B, C des parties de Ω .
 On dit que A, B et C sont des événements indep. si:
 $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
 $P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$
 $P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$
 et $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$

⚠: 4 conditions; 3 ne suffisent pas.

Ex: lancer de 2 dés équilibrés, $\Omega = E_6 \times E_6$ et P uniforme sur Ω

A : "le résultat du 1^{er} dé est pair" $A = \{(2, \omega_2), (4, \omega_2), (6, \omega_2)\}$
 B : "le résultat du 2^{ème} dé est impair" $B = \{(\omega_1, 1), (\omega_2, 1), (\omega_1, 3)\}$
 C : "les deux dés non pas la même parité" $C = \{(\omega, \omega_2): (\omega_1 \text{ pair et } \omega_2 \text{ imp}) \text{ ou } (\omega_1 \text{ imp et } \omega_2 \text{ pair})\}$

$$P(A) = \frac{1}{2} \quad P(B) = \frac{1}{2} \quad P(C) =$$

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{3}{36} \quad \text{ou } P = P_1 \otimes P_2 \quad A = \{2, 4, 6\} \times E_6$$

donc $P(A) = P_1(\{2, 4, 6\}) \cdot P_2(E_6) = \frac{1}{2}$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \text{ (vu par l'exemple } P = P_1 \otimes P_2, A = \{2, 4, 6\} \times E_6, B = E_6 \times \{1, 3, 5\})$$

$$A \cap C = \{(\omega_1, \omega_2) : \omega_1 \text{ est pair et } \omega_2 \text{ est impair}\} = \{2, 4, 6\} \times \{1, 3, 5\}$$

$$P(A \cap C) = P_3(\{2, 4, 6\}) \cdot P_2(\{1, 3, 5\}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = P(A) \cdot P(C)$$

$$P(B \cap C) = P(\{(\omega_1, \omega_2) : \omega_2 \text{ imp. et } \omega_1 \text{ pair}\}) = \frac{1}{4} = P(B) \cdot P(C)$$

$$A \cap C = B \cap C = A \cap B \cap C \quad P(A \cap B \cap C) \neq P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

Prop: $\left[\begin{array}{l} \text{Si } A, B, C \text{ sont indep. alors } A, B, C^c \text{ sont indep.}, \\ A, B^c, C^c \text{ sont indep.}, \text{ etc.} \end{array} \right.$

(On peut retirer des "complémentaire", on garde la propriété que la probabilité de l'intersection égal le produit des probabilités)

pr: Soient A, B, C des événements indépendants. Alors ils sont indep. 2 à 2.
On veut montrer $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{un} \\ \text{A et C indep donc A et C indep} \\ \text{B et C indep} \end{array} \right.$
 $P(A \cap C^c) = P(A) \cdot P(C^c)$
 $P(B \cap C^c) = P(B) \cdot P(C^c)$
 $P(A \cap B \cap C^c) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C^c)$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{A et B indep donc A et B indep} \\ \text{B et C indep} \end{array} \right.$
Comme A, B et C sont indep., donc $A \cap B$ est indep. de C , donc indep. de C^c
 $P(A \cap B \cap C^c) = P(A \cap B) \cdot P(C^c) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C^c)$

Généralisation: $A_1, A_2, \dots, A_k$ sont des événements indépendants ssi ...
pour tout entier $\ell \in \{2, \dots, k\}$ et pour tous $L_1, \dots, L_\ell$ distincts dans $\{1, \dots, k\}$, $P(A_{L_1} \cap \dots \cap A_{L_\ell}) = P(A_{L_1}) \cdot \dots \cdot P(A_{L_\ell})$

Probabilité conditionnelle

Déf: Soit $A \subseteq \Omega$, tq $P(A) > 0$. Si $B \subseteq \Omega$, on appelle probabilité de B conditionnelle à A et on note $P(B/A)$ ou $P_A(B)$: $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

Ex: Si P est la probabilité uniforme: $P(B) = \frac{\#B}{\#\Omega}$
 $P(B/A) = \frac{\#A \cap B}{\#A} = \frac{\frac{\#A \cap B}{\#\Omega}}{\frac{\#A}{\#\Omega}} = \frac{\#A \cap B}{\#A}$

Soit $A \subseteq \Omega$ tq $P(A) > 0$

Prop: A et B sont indép.sssi: $P(B/A) = P(B)$

pv: $P(B/A) = P(B) \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
 $\Leftrightarrow A$ et B sont indép.s

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) \quad \text{si } 0 < P(A) < 1$$

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap A^c) = P(A) \cdot P(B/A) + P(A^c) \cdot P(B/A^c)$$

Formule des probabilités totales: Si $A_1, \dots, A_k$ est une partition de Ω pour tout événement B , $P(B) = P(A_1)P(B/A_1) + \dots + P(A_k)P(B/A_k)$
 $= \sum_{i=1}^k P(A_i)P(B/A_i)$

pv: $B \cap A_1, \dots, B \cap A_k$ forme une partition de B , donc
 $P(B) = \sum_{i=1}^k P(B \cap A_i)$ Pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$,
 $P(B \cap A_i) = P(A_i) \cdot P(B/A_i)$

Prop: Soit $A \subseteq \Omega$ tq $P(A) > 0$
 La fonction qui à tout événement B associe $P(B/A)$ est une probabilité sur Ω

Notons la $P(\cdot/A): P(\Omega) \longrightarrow [0, 1]$
 $B \longmapsto P(B/A)$

pv: Soit $q: \Omega \longrightarrow [0, 1]$
 $\omega \longmapsto q(\omega) = \frac{P(\{\omega\} \cap A)}{P(A)}$

$\forall \omega \in \Omega, 0 \leq q(\omega) \leq 1$ car $\{\omega\} \cap A \subseteq A$

$$\sum_{\omega \in \Omega} q(\omega) = \frac{\sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\} \cap A)}{P(A)} = \frac{\sum_{\omega \in A} P(\{\omega\})}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$$

$\hookrightarrow$ si $\omega \notin A$ donc $\{\omega\} \cap A = \emptyset$
 $\Rightarrow P(\{\omega\} \cap A) = 0$

si $\omega \in A$ $\{\omega\} \cap A = \{\omega\}$
 donc $P(\{\omega\} \cap A) = P(\{\omega\})$

$P(B/A)$
 probability of B
 when A has already
 occurred

$P(A \cap B)$
 probability
 that both A and B
 occur.

$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B)$
 proba that B occurs
 proba that A occurs when B already occurred

If A, B independent
 $P(A/B) = P(A)$
 Because even though B
 happened, it doesn't affect
 A .

Ex: $A = \{2, 4, 6\}$

On a lancé un dé et
 on a obtenu un nombre
 pair.

On prend garde de proba
 $p_A(\omega)$ qui donne proba
 d'obtenir l'un des nombres.

Or on a obtenu nombre
 pair donc $\forall \omega, p_A(\omega) \neq \frac{1}{6}$

$$p_A(1) = p_A(3) = p_A(5) = 0$$

$$p_A(2) = p_A(4) = p_A(6) = \frac{1}{3}$$

Donc q est un germe de probabilité. Soit $\tilde{P}$ l'unique probabilité associée au germe q . Pour tout événement B , $\tilde{P}(B) = \sum_{\omega \in B} q(\omega)$

$$= \sum_{\omega \in B} \frac{P(\{\omega\} \cap A)}{P(A)} \\ = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = P(B/A)$$

Conséquence: toutes les formules connues pour les probas s'appliquent pour les probas conditionnelles.

Formules de Bayes:

Thm 1: Soient A et B des événements tq $P(A) > 0$ et $P(B) > 0$

$$P(A/B) = P(B/A) \cdot \frac{P(A)}{P(B)}$$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$\underbrace{\frac{P(A \cap B)}{P(B)}}_{P(A/B)} \cdot \frac{P(A)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B/A) \\ \Rightarrow$$

pv: $P(A \cap B) = P(B/A) P(A)$

Thm 2: $P(A/B) = \frac{P(A) \cdot P(B/A)}{P(A)P(B/A) + P(A^c) \cdot P(B/A^c)}$

pv: $P(B) = P(A) \cdot P(B/A) + P(A^c) \cdot P(B/A^c)$

Ex(alcooltest): alcooltest 1% de faux positifs
1% de faux négatifs

1% d'alcoolisés dans la population

A : "être alcoolisé" T : "le test est positif"

On veut calculer $P(A/T)$ avec $P(T/A^c) = 10^{-2}$
 $P(T^c/A) = 10^{-3}$
 $P(A) = 10^{-3}$

$P(A/T) = \frac{1}{11}$ poly pages: 30 - 31