



## Probabilités

$\Omega, \mathcal{P}(\Omega), (A: \text{tribu})$

Qd  $\Omega$  est fini ou dénombrable  $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$   
 $A \in \mathcal{A}$  événement

Modélisation probabiliste  
aléatoire

Def  $P$  est une probabilité sur  $\Omega, \mathcal{P}(\Omega)$ ssi

$$P: \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0, 1]$$

(fonction de  $\mathcal{P}(\Omega)$  dans  $[0, 1]$ )

( $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), 0 \leq P(A) \leq 1$ ) telle que :

1)  $P(\Omega) = 1$

2) Si  $A_1, \dots, A_n$  forment une partition de  $A$ ,  
alors  $P(A) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$

Conséquence :  $P(A^c) = 1 - P(A)$

Preuve:  $A$  et  $A^c$  forment une partition de  $\Omega$ ,  
on applique 1) et 2)

Def (fonction de masse)  
Un germe de probabilité si c'est une fonction  
de  $\Omega$  dans  $[0, 1]$  tq:

Spécifique au cas où  
 $\Omega$  est fini ou  
dénombrable

$$\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1$$

Prop L'ensemble des probabilités sur  $\Omega, \mathcal{P}(\Omega)$  et l'ensemble  
des germes de probabilités sur  $\Omega$  sont en bijection.  
De sorte que chaque probabilité a un germe associé.

\* Si  $P$  est une probabilité, soit  $p: \Omega \longrightarrow [0, 1]$   
 $\omega \longmapsto p(\omega) = P(\{\omega\})$

les  $\{\omega\}, \omega \in \Omega$ , forment une partition de  $\Omega$ , donc

$$1 = P(\Omega) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega)$$

Germe de probabilité

- fonction qui prend  
un événement et donne  
la probabilité

$$p(\omega) = \frac{1}{\text{Card}(\Omega)}$$

$P$  - fonction qui prend  
un ensemble des événements  
et donne la probabilité  
de ce si un des événements  
peut arriver

$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$$

Donc  $\mu$  est un germe de probabilité

\* Si  $\mu$  est un germe de probabilité, soit  $P$  une fonction sur  $\mathcal{P}(\Omega)$  définie par:  
si  $A \subset \Omega$ ,  $P(A) = \sum_{\omega \in A} \mu(\omega)$   $P(A) \geq 0$

Par ailleurs,  $1 = \sum_{\omega \in \Omega} \mu(\omega) \geq \sum_{\omega \in A} \mu(\omega)$  Donc  $P(A) \leq 1$ , et aussi  $P(\Omega) = 1$

Enfin, si  $A_1, \dots, A_n$  forment une partition de  $A$

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} \mu(\omega) = \underbrace{\sum_{\omega \in A_1} \mu(\omega)}_{P(A_1)} + \sum_{\omega \in A_2} \mu(\omega) + \dots + \underbrace{\sum_{\omega \in A_n} \mu(\omega)}_{P(A_n)}$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

Remarque  $P(\{\omega\}) = \mu(\omega)$

Donc  $\mu$  est une probabilité sur  $\Omega$ ,  $P(\Omega)$

Ex: On lance 2 dés, quelle est la probabilité d'obtenir 7?  
 $\Omega = \{(i,j), i \in \{1, \dots, 6\}, j \in \{1, \dots, 6\}\} \subset E_6 \times E_6$

Germe:  $\mu(i,j) = \frac{1}{36}$  germe de probabilité

$A$ : événement obtenir 7 :  $A = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$   
 $\subset \Omega$

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} = \sum_{\omega \in A} \mu(\omega)$$

Si on ne s'intéresse qu'à la somme des dés, un autre modèle  
 $\tilde{\Omega} = \{2, 3, \dots, 12\}$

et  $\tilde{\mu}: \tilde{\Omega} \rightarrow [0, 1]$

$$\tilde{\mu}(2) = \frac{1}{36} \quad \tilde{\mu}(3) = \frac{2}{36} \quad \tilde{\mu}(7) = \frac{6}{36}$$

$$\tilde{\mu}(\{7\}) = \mu(A)$$

Si  $P$  est une probabilité et  $\mu$  son germe,  $\forall \omega \in \Omega$ ,  $\mu(\omega) = P(\{\omega\})$   
et  $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega)$ ,  $P(A) = \sum_{\omega \in A} \mu(\omega)$

Prop: Pour tout événement  $A$  et  $B$   
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$   
 ça ressemble à  $1_{A \cup B} = 1_A + 1_B - 1_{A \cap B}$

Pr de la prop: Si  $\mu$  est le germe de  $P$   

$$P(A \cup B) = \sum_{\omega \in \Omega} \mu(\omega) = \sum_{\omega \in \Omega} \mu(\omega) 1_{A \cup B}(\omega)$$

$$= \sum_{\omega \in \Omega} \mu(\omega) (1_A(\omega) + 1_B(\omega) - 1_{A \cap B}(\omega))$$
 Donc 
$$P(A \cup B) = \sum_{\omega \in \Omega} \mu(\omega) 1_A(\omega) + \sum_{\omega \in \Omega} \mu(\omega) 1_B(\omega) - \sum_{\omega \in \Omega} \mu(\omega) 1_{A \cap B}(\omega)$$

$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Probabilité uniforme: Si  $\Omega$  est fini, la probabilité uniforme sur  $\Omega$  est définie par  
 $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$

$P$  est bien une probabilité sur  $\Omega, \mathcal{P}(\Omega)$   
 de germe  $p: \Omega \rightarrow [0,1]$   
 $\omega \mapsto p(\omega) = \frac{1}{\#\Omega}$ , est un germe de probabilité  
 (on a bien  $P(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega)$ )

"au hasard"  $\leadsto$  modèle avec une probabilité uniforme avec un bon choix de  $\Omega$

Probabilité produit Soit  $P_1$  probabilité sur  $\Omega_1, \mathcal{P}(\Omega_1)$   
 $P_2$   $\Omega_2, \mathcal{P}(\Omega_2)$

Thm: Il existe une unique probabilité  $P_1 \otimes P_2$  sur  $\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{P}(\Omega_1 \times \Omega_2)$  et  
 $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega_1)$  et  $\forall B \in \mathcal{P}(\Omega_2), (P_1 \otimes P_2)(A \times B) = P_1(A) \cdot P_2(B)$

pr: Soit  $p: \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow [0,1]$   
 $(\omega_1, \omega_2) \mapsto p(\omega_1, \omega_2) = P_1(\{\omega_1\}) \cdot P_2(\{\omega_2\}) = p_1(\omega_1) \cdot p_2(\omega_2)$   
 où  $p_1$  est le germe de  $P_1$  et le germe de  $P_2$

Montrons que  $p$  est un germe de probabilité sur  $\Omega_1 \times \Omega_2$

$$\bullet \forall (\omega_1, \omega_2) \in \Omega_1 \times \Omega_2, 0 \leq p(\omega_1, \omega_2) \leq 1 \quad 0 \leq p_1(\omega_1) \leq 1 \quad \text{et } 0 \leq p_2(\omega_2) \leq 1$$

$$\bullet \sum_{(\omega_1, \omega_2) \in \Omega_1 \times \Omega_2} p(\omega_1, \omega_2) = \sum_{(\omega_1, \omega_2) \in \Omega_1 \times \Omega_2} p_1(\omega_1) \cdot p_2(\omega_2) = \sum_{\omega_1 \in \Omega_1} p_1(\omega_1) \cdot \sum_{\omega_2 \in \Omega_2} p_2(\omega_2)$$

$$= \sum_{\omega_1 \in \Omega_1} p_1(\omega_1) \cdot \left( \sum_{\omega_2 \in \Omega_2} p_2(\omega_2) \right) = \sum_{\omega_1 \in \Omega_1} p_1(\omega_1) \cdot 1 = 1 \quad \text{car } p_1 \text{ est un germe}$$

$$= \sum_{\omega_2 \in \Omega_2} p_2(\omega_2) = 1 \quad \text{car } p_2 \text{ est un germe}$$

Donc  $p$  est un germe de probabilité sur  $\Omega_1 \times \Omega_2$

Soit  $\tilde{P}$  la probabilité absolue

$$\forall A \subset \Omega_1, \text{ et } \forall B \subset \Omega_2, \tilde{P}(A \times B) = \sum_{\substack{(\omega_1, \omega_2) \\ \omega_1 \in A \\ \omega_2 \in B}} p(\omega_1, \omega_2) = \sum_{\omega_1 \in A} p_1(\omega_1) \cdot \sum_{\omega_2 \in B} p_2(\omega_2)$$

$$= \sum_{\omega_1 \in A} p_1(\omega_1) \cdot p_2(B) = P_1(A) \cdot P_2(B) = P(A \times B)$$

$$\tilde{P} = P \text{ est l'unique probabilité qui vérifie la propriété du thm.}$$

Extension: à  $P_1 \otimes \dots \otimes P_k$  sur  $\Omega_1 \times \dots \times \Omega_k$  avec  $P_i$  probabilité sur  $\Omega_i, P(\Omega_i), i = 1, \dots, k$

Rq: Si  $P$  est une probabilité uniforme sur  $\Omega_1 \times \Omega_2, P(\Omega_1 \times \Omega_2)$   
 $P = P_1 \otimes P_2$  où  $P_1$  est la probabilité uniforme sur  $\Omega_1, P(\Omega_1)$   
 et  $P_2$  probabilité uniforme sur  $\Omega_2, P(\Omega_2)$

$$\text{En effet, si } A \subset \Omega_1 \text{ et } B \subset \Omega_2, P(A \times B) = \frac{\#(A \times B)}{\#(\Omega_1 \times \Omega_2)} = \frac{(\#A)(\#B)}{(\#\Omega_1)(\#\Omega_2)} = \left( \frac{\#A}{\#\Omega_1} \right) \cdot \left( \frac{\#B}{\#\Omega_2} \right) = P_1(A) \cdot P_2(B)$$

Événements indépendants Soit  $P$  probabilité sur  $\Omega, P(\Omega)$

Déf: Si  $A$  et  $B$  sont deux événements, on dit qu'ils sont indépendants si et seulement si  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

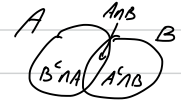
Prop: [ Si  $A$  et  $B$  sont indépendants, alors  $A$  et  $B^c$  sont indépendants

pv: On doit montrer  $P(A \cap B^c) = P(A) \cdot P(B^c)$  [On sait  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ ]

$$P(B^c) = 1 - P(B)$$

$$P(A) \cdot P(B^c) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$= P(A) - P(A \cap B) \text{ car } A \text{ et } B \text{ sont indépendants}$$



Mais  $(A \cap B^c)$  et  $(A \cap B)$  sont disjoints et leur réunion est A

$$\text{Donc } P(A) = P(A \cap B^c) + P(A \cap B) \quad \text{Donc } P(A) - P(A \cap B) = P(A \cap B^c)$$

$$\text{Donc } P(A) \cdot P(B^c) = P(A \cap B^c)$$