



La puissance de la modélisation aléatoire

- | | |
|---------------------------------|-------------------------------|
| → Vaccins / Traitement médicaux | → Physique statistique |
| → Épidémies | → Générateur de données météo |
| → Genomique (ex: héritabilité) | → Théorie de l'information |

Ensembles et dénombrement

Ω - ensemble "univers"

Événements : sous-ensembles de Ω

ex:

Lancer d'un dé

$\Omega = \{1, \dots, 6\}$ (E_6 : notations)

Obtenir un nombre pair:

$A = \{2, 4, 6\}$

Si A fini, $\#A$, $\text{Card}(A)$ cardinal de A = nombre d'éléments de A

Prop: Si f est une fonction $f: A \rightarrow B$:

$\#A = \#B$ ssi $\exists$ une fonction bijective de A vers B

$\#A \leq \#B$ injective

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$$

Fonctions indicatrices

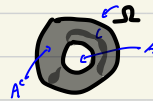
Soit $A \subset \Omega$.

Indicatrice de A : $1_A: \Omega \rightarrow \{0, 1\}$

$$\omega \mapsto 1_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{si } \omega \notin A \end{cases}$$

complémentaire de A

$$A^c = \{\omega \in \Omega : \omega \notin A\}$$



$$1_{A^c} = 1 - 1_A \quad \text{càd: } \forall \omega \in \Omega, 1_{A^c} = 1 - 1_A(\omega)$$

pu: soit $\omega \in \Omega$, 2 possibilités:

1) $\omega \in A$: $1_A(\omega) = 1$

donc $\omega \notin A^c$ et $1_{A^c}(\omega) = 0 = 1 - 1_A(\omega)$

2) $\omega \notin A$ etc

$$1_{A \cup B} = 1_A + 1_B - 1_{A \cap B}$$

Rq: $\#A = \sum_{\omega \in A} 1 = \sum_{\omega \in \Omega} 1_A(\omega)$

Donc $\#(A \cup B) = \sum_{\omega \in \Omega} 1_{A \cup B}(\omega)$
 $= \sum_{\omega \in \Omega} (1_A(\omega) + 1_B(\omega) - 1_{A \cap B}(\omega))$
 $= \sum_{\omega \in \Omega} 1_A(\omega) + \sum_{\omega \in \Omega} 1_B(\omega) - \sum_{\omega \in \Omega} 1_{A \cap B}(\omega)$

Partition de A

↳ collection d'ensembles $A_1, \dots, A_n$ non vides

$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad (i \neq j)$$

$$\text{et } A_1 \cup \dots \cup A_n = A$$

Pourquoi?

Quel utilité?

Prop. $A_1, \dots, A_n$ forment une partition de A ssi

• $\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad 1_{A_i}$ n'est pas la fonction identiquement nulle

$$\bullet 1_A = \sum_{i=1}^n 1_{A_i} = 1_{A_1} + \dots + 1_{A_n}$$

Prop. Soient A et B ensembles finis

Le nombre d'applications de A dans B est $(\#B)^{\#A}$

p.v. $\begin{matrix} A \\ \vdots \end{matrix}$ $\begin{matrix} B \\ \odot \end{matrix}$ $\#A = p$ $\#B = q$

$p \left\{ \begin{array}{l} \text{pour le premier élément de A : } q \text{ possibilités} \\ \text{pour le deuxième} \\ \text{pour le } p\text{-ième} \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} \text{p.v. pour} \\ \text{rec.} \\ \text{sur le} \\ \text{nombre} \\ \text{d'éléments de} \end{array} \right.$

$\underbrace{q \cdot q \cdot \dots \cdot q}_{p \text{ fois}} \rightarrow q^p = (\#B)^{\#A}$

Corollaire.

Soit Ω un ensemble fini et $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble de ses sous-ensemble

Alors $\#(\mathcal{P}(\Omega)) = 2^{\# \Omega}$

p.v.

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonction de Ω dans $\{0, 1\}$

$\mathcal{F} = \{1_A, A \subset \Omega\}$. En effet:

soit $f: \Omega \rightarrow \{0, 1\}$. Notons $A = \{\omega \in \Omega : f(\omega) = 1\}$

Alors, $f = 1_A$ p.v. soit $\omega \in \Omega$, si $\omega \in A \dots$, si $\omega \notin A \dots$

Donc $\mathcal{F} \subset \{1_A : A \subset \Omega\}$ si $A \subset \Omega$, $1_A: \Omega \rightarrow \{0, 1\}$, donc $1_A \in \mathcal{F}$

Donc $\{1_A : A \subset \Omega\} \subset \mathcal{F}$

Ceci permet d'établir une bijection entre $\mathcal{F}$ et $\mathcal{P}(\Omega)$

$$h: \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow \mathcal{F}$$

$$A \rightarrow \mathcal{I}_A$$

$$\mathcal{I}_A = \mathcal{I}_B \Leftrightarrow A = B$$

h est une bijection

$$\text{Donc } \# \mathcal{F} = \# \mathcal{P}(\Omega)$$

Ensemble produit

Def. Si A et B sont deux ensembles

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}$$

si $A_1, \dots, A_n$ sont n ensembles

$$A_1 \times \dots \times A_n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1 \in A_1, \dots, x_n \in A_n\}$$

Prop. [Si A et B sont des ensembles finis,
 $\#(A \times B) = (\#A) \cdot (\#B)$

Pv. Pour tout $a \in A$, soit $C_a = \{(a, y) : y \in B\}$

$C_a \subset (A \times B)$, les $C_a \neq \emptyset$

si a_1 et a_2 sont des éléments distincts $\Rightarrow C_{a_1} \cap C_{a_2} = \emptyset$

$$\text{et } A \times B = \bigcup_{a \in A} C_a$$

Donc les $C_a, a \in A$ forment une partition de $A \times B$

$$\text{Donc } \mathcal{I}_{A \times B} = \sum_{a \in A} \mathcal{I}_{C_a}$$

$$\text{Donc } \#(A \times B) = \sum_{a \in A} \#C_a \text{ mais } \forall a \in A, \#C_a = \#B$$

$$\text{Donc } \#(A \times B) = (\#A) \cdot (\#B)$$

Si $\#A = p+1$

Soit $a \in A$ fixé et $\tilde{A} = A \setminus \{a\}$ $\# \tilde{A} = p$

Soit $\tilde{\mathcal{F}}_p$ l'ensemble des fonctions de $\tilde{A}$ dans B

et $\mathcal{F}_p$ l'ensemble des fonctions de $\tilde{A}$ dans B

g l'ensemble des fonctions de $\{a\}$ dans B

$\#g = q$ et $\#\tilde{\mathcal{F}}_p = q^p$ (par hypothèse de récurrence)

On peut construire une bijection $h: \tilde{\mathcal{F}}_{p+1} \rightarrow g \times \tilde{\mathcal{F}}_p$

Soit $f \in \tilde{\mathcal{F}}_{p+1}$ soit $f_a: \{a\} \rightarrow B$ $f_a \in g$
 $a \mapsto f_a(a) = f(a)$

et soit $\tilde{f}: \tilde{A} \longrightarrow B$

$$a \longmapsto \tilde{f}(a) = f(a) \quad f \in \mathcal{F}_A$$

On définit $h(\tau) = (f_\alpha, \tilde{f})$

Montrons que c'est une bijection

(L'écriture)

Donc $\#F_{p^2} = \#(g \times F_p) = \#g \cdot \#F_p = q \cdot q^p = q^{p+1}$

Permutations: усі способи перестановки об'єктів у A

Permutations de $A = \{ \text{bijections de } A \text{ dans } A \}$

Prop. Soit A et B finis de même cardinal

Soit $\mathcal{P}_{A \rightarrow B}$ l'ensemble des bijections de A dans B

Alors $\# \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A = (\# A)! = n!$ si $n = \# A = \# B$

Rq. Donc si $\mathcal{P}_n$ est l'ensemble des permutations de $E_n = \{1, \dots, n\}$

$$\# \tilde{\mathcal{F}}_n = n!$$

Arrangements de p éléments parmi n :

Soit A ensemble fini tq #A = p
B _____ #B = n

$\mathcal{I}$: ensemble des fonctions injectives de A dans B

Thm: $\# \mathcal{I}_{A,B} = A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$ car pour 1^{er} objet, y'a n! façon, pour 2^{ème} (n-1),... pour p^{ème} (n-p+1): donc $A_n^p = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-p+1) \cdot (n-p) \cdot (n-p-1) \cdot \dots \cdot 1}{(n-p) \cdot (n-p-1) \cdot \dots \cdot 1}$

$$S: \mu \leq n$$

Rq: Si $\mu = n$, $A_n^n = n!$

$$S: n \leq p \quad A_n^p = 0$$

$I_{A,B}$ est donc l'ensemble des bijections de A dans B
car $\#A = \#B$)

Prop: $\# \mathcal{I}_{A,B} = \# \mathcal{I}_{E_A,B}$

1) Avec f bijective de A dans $E_p = \{1, \dots, p\}$

$$\# \mathcal{I}_{A,B} = \# \mathcal{I}_{E,B}$$



2) Avec g bijectives de B dans E_n

$$\#J_{E_A, B} = \#J_{E_A, E_B}$$

$$G_{p,n} = \{(x_1, \dots, x_p) : \forall i \in \{1, \dots, p\}, x_i \in \{1, \dots, n\} \text{ et } x_i \neq x_j, x_i \neq x_j\}$$

: suites coordonnées de p éléments distincts parmi n .

Prop: $\# \mathcal{I}_{p,n} = \# \mathcal{I}_{E_p, E_n}$

pv: On construit une bijection entre les deux ensembles $\mathcal{I}_{p,n}$ et $\mathcal{I}_{E_p, E_n}$

On définit $h: \mathcal{I}_{E_p, E_n} \longrightarrow \mathcal{I}_{p,n}$
Ensemble de p-uplets de la forme $(x_1, \dots, x_p)$ où $x_i \in E_n$ et $x_i \neq x_j \forall i \neq j$
ensemble des fonction injectives de E_p dans E_n $E_p = \{1, \dots, p\}$

si $f \in \mathcal{I}_{E_p, E_n}$ $h(f) = (f(1), \dots, f(p))$ $h(f) \in \mathcal{I}_{p,n}$ car f est injective
 $f(i) \neq f(j) \forall i \neq j$ car f injective

Montrons que h est bijective: Soient $f_1, f_2 \in \mathcal{I}_{E_p, E_n}$

1) On suppose que $h(f_1) = h(f_2)$

$$\Leftrightarrow (x_1, \dots, x_p) = (y_1, \dots, y_p)$$

$$\Leftrightarrow x_i = y_i \Leftrightarrow f_1(i) = f_2(i)$$

$$x_p = y_p \Leftrightarrow f_1(p) = f_2(p)$$

Ainsi $f_1 = f_2$

donc h est injective

2) Soit $(x_1, \dots, x_p) \in \mathcal{I}_{p,n}$

soit $f: E_p \rightarrow E_n$

$$i \mapsto f(i) = x_i$$

f est injective car $i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j$, donc $f \in \mathcal{I}_{E_p, E_n}$ et on a $h(f) = (x_1, \dots, x_p)$

donc pour chaque p-uplet $\in \mathcal{I}_{p,n}$ on peut trouver une fonction inj. $\in \mathcal{I}_{E_p, E_n}$

Donc h est surjective.

inject. + surject. = f biject.

Preuve du thm:

On a vu que $\# \mathcal{I}_{A,B}$ ne dépend que de $p = \#A$ et $n = \#B$

On note $A_n^p = \# \mathcal{I}_{A,B} = \# \mathcal{I}_{p,n}$ (par la prop)

Preuve par récurrence sur n . On va montrer que: $\forall n \geq 1 \ P(n)$

$$\text{où } P(n): \forall p \in \{1, \dots, n\} \ A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

1) $P(1)$ est vrai car $\# \mathcal{I}_{1,1} = 1$

2) Supposons $P(n)$ vraie, et montrons $P(n+1)$

Soit $p \in \{1, \dots, n+1\}$

$$\begin{cases} \mathcal{I}_{p,B} = \{(x_1, \dots, x_p) \mid \forall i \in \{1, \dots, p\}, x_i \in B \text{ et si } i \neq j, x_i \neq x_j\} \quad \#B = n \\ \mathcal{I}_{p,n} = \mathcal{I}_{E_p, E_n} = \mathcal{I}_{p,B} \end{cases}$$

$$\mathcal{I}_{p,n+1} = \bigcup_{j \in \{1, \dots, n+1\}} (\mathcal{I}_{p-1, E_{n+1} \setminus \{j\}} \times \{j\}) \quad (x_1, \dots, x_p) = \begin{cases} x_p \in \{1, \dots, n+1\} \\ \text{et } (x_1, \dots, x_{p-1}) \in \mathcal{I}_{p-1, E_{n+1} \setminus \{x_p\}} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ (1, 3, 5) & + & (4) \\ (1, 5, 3) & + & (4) \\ \vdots & & \end{matrix} \quad \begin{matrix} p-1 & j & p \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \end{matrix} \quad \begin{matrix} E_{n+1} \setminus \{j\} \\ E_{n+1} \setminus \{4\} = \{1, 2, 3, 5\} \\ E_{n+1} \setminus \{3\} = \{1, 2, 4, 5\} \\ E_{n+1} \setminus \{5\} = \{1, 2, 3, 4\} \end{matrix} \\ & \begin{matrix} (2, 3, 4) + (1) = (2, 3, 4, 1) \\ (2, 3, 5) + (1) = (2, 3, 5, 1) \\ \vdots \end{matrix} \end{aligned}$$

les $\mathcal{I}_{p-1, E_{n+1} \setminus \{j\}} \times \{j\}$ forment une partition de $\mathcal{I}_{p, n+1}$

Donc $\# \mathcal{I}_{p, n+1} = \sum_{j=1}^{n+1} \# \mathcal{I}_{p-1, E_{n+1} \setminus \{j\}}$ Mais, $\# \mathcal{I}_{p-1, E_{n+1} \setminus \{j\}} = A_{n+1-j}^{p-1}$

Donc $A_{n+1}^p = (n+1) \cdot A_n^{p-1}$

Par hyp. de rec. $A_n^{p-1} = \frac{n!}{(n-(p-1))!} = \frac{n!}{(n-p+1)!}$

Donc $A_{n+1}^p = \frac{(n+1)!}{(n+1-p)!}$

Donc $\forall p \in \{1, \dots, n+1\}$ $A_{n+1}^p = \frac{(n+1)!}{(n+1-p)!}$, on a montré $P(n+1)$

Combinaisons de p parmi n : Arrangements: ordre
Combinaisons: sans ordre

Si B est un ensemble fini tq $\#B = n$,
ensemble des ensembles de B tq cardinal de chaque ensemble est égal à p
 $\mathcal{C}_{p, B} = \{Z \subset B \mid \#Z = p\}$
 $\# \mathcal{C}_{p, B} = \# \mathcal{C}_{p, E_n}$ ne dépend que de p et n

On note ce cardinal C_n^p ou $\binom{n}{p}$

Thm: $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{A_n^p}{p!}$

Pr: On veut montrer $A_n^p = p! C_n^p$
Il suffit d'établir une bijection entre $\mathcal{I}_{p, n}$ et $\mathcal{C}_{p, E_n} \times$

Si $(x_1, \dots, x_p) \in \mathcal{I}_{p, n}$, alors $\{x_1, \dots, x_p\} \in \mathcal{C}_{p, E_{n+1}}$ pourquoi $n+1$?

$\forall Z \in \mathcal{C}_{p, E_{n+1}}$, notons $\mathcal{I}_Z = \{(x_1, \dots, x_p) \mid \forall i, x_i \in Z, \text{ et si } i \neq j, x_i \neq x_j\}$
ex: $Z = \{1, 2\}$ donc $\mathcal{I}_Z = \{(1, 2), (2, 1)\}$

Alors les $\mathcal{I}_Z, Z \in \mathcal{C}_{p, n}$ forment une partition de $\mathcal{I}_{p, n}$

Donc $\# \mathcal{I}_{p, n} = \sum_{Z \in \mathcal{C}_{p, n}} \# \mathcal{I}_Z$

nombre des permutations possible pour un ensemble de la taille $\#Z$

$\# \mathcal{I}_Z = \# \mathcal{I}_{E, Z}$ Mais $\#Z = p$
 $= A_p^p = p!$ Donc $\# \mathcal{I}_{p, n} = (\# \mathcal{C}_{p, n}) \cdot p!$

$$C_n^p \text{ го принципа } C_3^2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{6}{2} = 3$$

где конуса 3 и есть 2;

$\{1, 2, 3\} \Rightarrow \overbrace{(1, 2)}^{z_1}, \overbrace{(1, 3)}^{z_2}, \overbrace{(2, 3)}^{z_3}$ порядок не важен

используя $p!$ permutation, тогда $2! = 2$

Поэтому $A_n^p = C_n^p \cdot p!$ поскольку порядок важен.

$$C_n^{n-p} = C_n^p \quad C_n^{n-p} = \frac{n!}{(n-p)!(n-(n-p))!} = \frac{n!}{(n-p)!p!} = C_n^p$$

$$\overbrace{1 \dots 1}^n$$

$$C_n^p + C_n^{p-1}$$

$$\#P(E_n) = 2^n = \sum_{p=0}^n \#C_{p, E_n}$$

$$2^n = \sum_{p=0}^n C_n^p \rightarrow \text{pourquoi?}$$

$$C_{p, E_{n+1}} = C_{p, E_n} \cup \tilde{C}_{p-1, E_n}$$

$$\tilde{C}_{p-1, E_n} = \{ \{n+1\} \cup Z \mid Z \in E_n \}$$

• Triangle de Pascal: $C_{n+1}^p = C_n^p + C_n^{p-1}$

• $C_{n+m}^k = \#C_{k, A \cup B} = \sum_{p=0}^k (\#C_{p, A}) \cdot (\#C_{k-p, B})$

$\#A = n \quad \#B = m \quad A \cap B = \emptyset$ donc $\#(A \cup B) = n + m$

$$C_{n+m}^k = \sum_{p=0}^k C_n^p \cdot C_m^{k-p}$$

Formule du binôme:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k$$

par récurrence:

$$n=0$$

$$s=1$$

$$n=1$$

$$a+b = C_1^0 a^1 b^0 + C_1^1 a^0 b^1 = a+b \quad \text{OK}$$

On suppose $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k$

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^{k+1}$$

($\sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k a^{n+1-k} b^k$)

$$= \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} a^{n+1-k} b^k$$

$$= C_n^0 a^{n+1} + C_n^1 a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=1}^n (C_n^k + C_n^{k-1}) a^{n+1-k} b^k$$

C_{n+1}^k (triangle de Pascal)

$$C_{n+1}^0 a^{n+1} b^0 + C_{n+1}^{n+1} a^{n+1-(n+1)} b^{n+1} + \sum_{k=1}^n C_{n+1}^k a^{n+1-k} b^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k a^{n+1-k} b^k$$

Pr par dénombrement:

$$(a+b)^n = (a+b)(a+b)\dots(a+b)(a+b)$$

on développe : on obtient des puissances $a^{n-k}b^k$

On regroupe : le nombre de fois où on obtient $a^{n-k}b^k$ est le nombre de façons de choisir les k places dans le produit où on prend b quand on développe c'est le n° de ss-ensembles à k el^{ts} parmi n

Détails formels de ce raisonnement

$$\begin{aligned} a+b &= a^1b^0 + a^0b^1 \\ &= \sum_{\varepsilon \in \{0,1\}} a^\varepsilon b^{1-\varepsilon} \end{aligned}$$

$$(a+b)^n = \prod_{i=1}^n \left(\sum_{\varepsilon_i \in \{0,1\}} a^{\varepsilon_i} b^{1-\varepsilon_i} \right) = \sum_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{0,1\}^n} \left(\prod_{i=1}^n a^{\varepsilon_i} b^{1-\varepsilon_i} \right)$$

$$= \sum_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{0,1\}^n} a^{\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n} b^{n - (\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n)}$$

$$= \sum_{k=0}^n \left(\sum_{\substack{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{0,1\}^n \\ \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n = k}} a^k b^{n-k} \right)$$

$$= \# \{ (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{0,1\}^n : \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n = k \}$$

$$= \# \{ Z \subset \{1, \dots, n\} : \# Z = k \} \text{ en identifiant } Z \text{ à sa fonction indicatrice} \\ = C_n^k$$