



G

O

D

O

O

O

O

D

### Déf: [Convergence simple]

Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions,  $I$  un intervalle.

On dit que  $\sum f_n$  converge simplement sur  $I$  vers  $S$  (fonction) si  $\forall x \in I \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geq N$   
$$|\sum_{k=0}^n f_k(x) - S(x)| < \varepsilon$$

Ex:  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  où  $f_n(x) = \frac{x^n}{n^2}$  sur  $I = [0, 1]$

Converge point à point vers  $f(x) = 0$

Problème: La convergence simple ne garanti pas la continuité, dérivabilité, etc de  $f$  limite

### Déf: [Convergence uniforme]

La série  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  converge uniformément sur  $I$

vers une fonction  $S$  si:  
 $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N \quad |\sum_{k=0}^n f_k(x) - S(x)| < \varepsilon$   
 $\hookrightarrow$  ne dépend pas de  $x$

Cela signifie que la série converge avec la même vitesse sur chaque point  $x$ .

### Déf: [Convergence normale]

Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions sur  $I \subset \mathbb{R}$ ,

on dit que la série  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  converge normalement sur  $I$  lorsqu'il existe une suite  $(a_n)$  tq:

i)  $\forall n \in \mathbb{N} \quad |f_n|_a \leq a_n$

ii)  $\sum a_n$  converge

### règle d'Abel uniforme:

Soient  $f_n, g_n: I \rightarrow \mathbb{R}$  les suite des fonctions.

On suppose que  $\exists C \in \mathbb{N}$  tq  $s_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x) \leq C$

pour tout  $x \in I$  et  $n \in \mathbb{N}$ . De plus on suppose que  $(g_n)$  est décroissante et converge uniformement vers 0.

Alors  $\sum f_n g_n$  converge uniformement sur  $I$

### Propriétés

#### Continuité

Soit  $f_n: I \rightarrow \mathbb{R}$  une suite des fonctions continues bornées. On suppose que  $s = \sum f_n$  converge normalement sur  $I$ . Alors  $s$  est aussi continue.

#### Dérivabilité

Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions continues dérivables sur  $I \rightarrow \text{ouvert}$ .

On suppose que  $s = \sum f_n$  converge simplement sur  $I$  et  $\sum f'_n$  converge uniformement vers  $g$  sur  $I$

Alors  $s$  est dérivable et  $s' = g = \sum f'_n$

#### Intégration

Soient  $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  des fonctions continues.

On suppose que  $\sum f_n$  converge normalement sur  $[a, b]$  vers  $s$  (continue sur  $[a, b]$ ).

Alors  $\int_a^b s(t) dt = \sum \int_a^b f_n(t) dt$

Si  $\sum a_n$  une série entière convergente, alors  
 $|R_n| \leq |f_{n+1}(z)|$