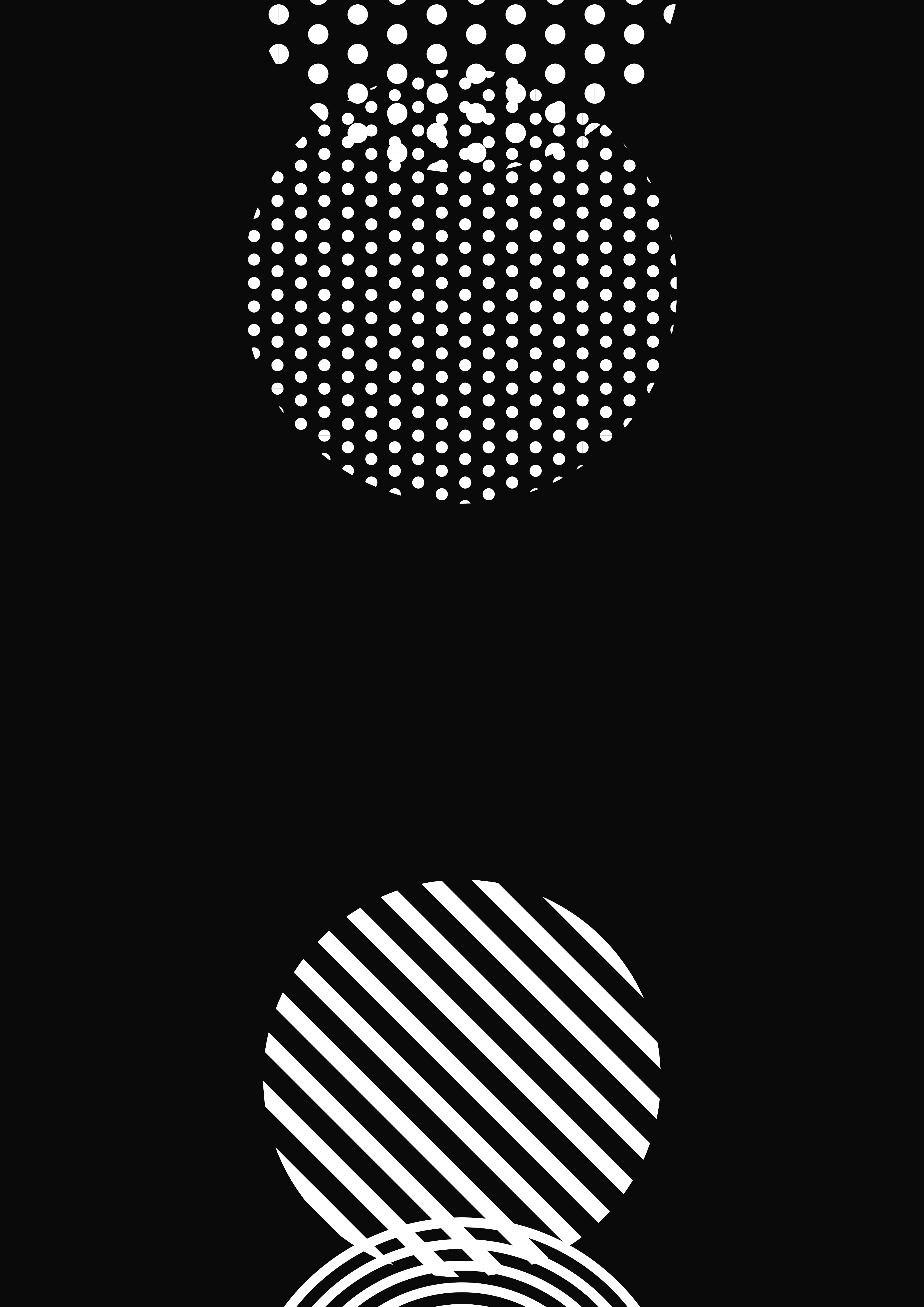

Exercice 1

$$f_1(x,t) = \frac{xt}{x^2+t^2} \quad \text{si } (x,t) \neq (0,0)$$
$$0 \quad \text{si } (x,t) = (0,0)$$

Soit y_n une suite tendant vers 0

$$f_1(y_n, y_n) = \frac{y_n^2}{2y_n^2} = \frac{1}{2} \neq f(0,0)$$

Donc f_1 n'est pas continue.

Exercice 2

$$f_2(x,t) = \frac{x^3}{x^2+t^2} \quad \text{si } (x,t) \neq (0,0)$$
$$0 \quad \text{si } (x,t) = (0,0)$$

Passons par les coordonnées polaires.

posons $x_n = r_n \sin(\theta_n)$
$t_n = r_n \cos(\theta_n)$ où r_n tend vers 0.

$$f_2(x_n, t_n) = \frac{r_n^3 \sin^3(\theta_n)}{r_n^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta)} = r_n \sin^3(\theta_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 = f(0,0)$$

Donc f_2 est continue en $0 \Rightarrow \mathbb{R}$

$$f_3(x,t) = \frac{x^2 - t^2}{x^2 + t^2}$$

Soit y_n qui tend vers 0.

$$f_3(y_n, 0) = \frac{y_n^2}{y_n^2} = 1 \neq f(0,0)$$

Donc f_3 n'est pas continue.

$$f_4(x,t) = \sin(x^2+t^2)$$

$x_n = r_n \sin\theta_n$ avec r_n tendant vers 0.
$t_n = r_n \cos\theta_n$

$$f_4(x_n, t_n) = \sin(x_n^2 + t_n^2) \frac{1}{\sqrt{x_n^2 + t_n^2}}$$

$\forall x \geq 0 \quad \sin(x) \leq x$

donc $f_4(x_n, t_n) \leq x_n^2 + t_n^2 \frac{1}{\sqrt{x_n^2+t_n^2}}$

$= \sqrt{x_n^2 + t_n^2}$
$= r_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 = f(0,0)$

Donc f_4 continue.

Exercice 2

$f_1(x,t) = x^2 + t^2 - 2x + 4t$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 2t + 4$$

$$f_2(x,t) = \frac{x-t}{x+t}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{(x+t)-(x-t)}{(x+t)^2} = \frac{2t}{(x+t)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{-(x+t)-(x-t)}{(x+t)^2} = \frac{-2x}{(x+t)^2}$$

$$f_3(x,t) = \sqrt{1+x^2t^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = xt^2 \frac{1}{\sqrt{1+x^2t^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = tx^2 \frac{1}{\sqrt{1+x^2t^2}}$$

$$f_4(x,t) = \ln\left(x+\sqrt{x^2+t^2}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+t^2}}\right)\left(\frac{1}{x+\sqrt{x^2+t^2}}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{t}{\sqrt{x^2+t^2}} \quad \frac{1}{x+\sqrt{x^2+t^2}}$$

$$f_5(x,t) = \frac{x\sin(t)}{1+x^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\sin(t)(1+x^2)-2x^2\sin(t)}{(1+x^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{x\cos(t)}{1+x^2}$$

Exercice 3

$$F(x) = \int_0^1 \frac{e^{-t}}{x+t}\,dt$$

1) $\frac{e^{-t}}{x+t}$ continue sur $]0,+\infty[\times [0,1]$

car $x+t \neq 0$ et $x+t$ continue sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, idem $\underline{e^{-t}}$

2) $\frac{\partial f}{\partial x} = e^{-t} \quad \frac{1}{x+t} \quad = \quad -\frac{e^{-t}}{(x+t)^2}$ aussi continue.

Donc, d'après le cours si
$F(x) = \int_a^b f(x,t)\,dt$ et $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue
donc F est dérivable et
$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$

Donc $F'(x) = \underbrace{-\int_0^1 \frac{e^{-t}}{\underbrace{(x+t)^2}_{}}}_{\text{toujours positive}}$
négative $\forall x \in]0,+\infty[$

ce qui implique
la décroissance de F.

3)
$$\int_0^1 \frac{e^{-t}}{x+1}\,dt \leq \int_0^1 \frac{e^{-t}}{x+t}\,dt \leq \int_0^1 \frac{e^{-t}}{x}\,dt$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{1}{x+1}[-e^{-t}]_0^1}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{} 0} \leq F(x) \leq \underbrace{\frac{1}{x}[-e^{-t}]_0^1}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{} 0}$$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$

4)
$$\int_0^1 \frac{e^{-1}}{x+t}\,dt \leq \int_0^1 \frac{e^{-t}}{x+t}\,dt \leq \int_0^1 \frac{e^{-0}}{x+t}\,dt$$

$$\Rightarrow e^{-1}[\ln(x+t)]_0^1 \leq F(x) \leq [\ln(x+t)]_0^1$$

$$\Rightarrow e^{-1}\underbrace{(\ln(x+1) - \ln(x))}_{\xrightarrow[x\to 0]{} +\infty} \leq F(x) \leq \underbrace{\ln(x+1) - \ln(x)}_{x \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty}$$

Donc $\lim\limits_{x\to 0} F(x) = +\infty$

5)

$$x\int_0^1 \frac{e^{-t}}{x+1} \leq x\int_0^1 \frac{e^{-t}}{x+t}\,dt \leq x\int_0^1 \frac{e^{-t}}{x}\,dt$$

$$\Rightarrow \frac{x}{x+1}\left[-e^{-t}\right]_0^1 \leq x\,F(x) \leq \left[-e^{-t}\right]_0^1$$

$$\xrightarrow[x\to+\infty]{}1 \quad (-e^{-1}+1) \leq x\,F(x) \leq -e^{-1}+1$$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x\,F(x) = -e^{-1}+1$

6) $\underset{\text{en } 0.}{\sim} -\ln(x)$

Exercice 4

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt \qquad g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2}\,dt$$

e^{-t^2} est continue

donc f l'est aussi

$$f'(x) = e^{-x^2}$$

$\dfrac{e^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2}$ continue

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{e^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2} = \frac{-(1+t^2)2x\,e^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2}$$

$$= -2x\,e^{-(1+t^2)x^2}$$

$$g'(x) = \int_0^1 -2x\,e^{-(1+t^2)x^2}\,dt$$

$$\underline{= -2x\,e^{-x^2}\int_0^1 e^{-(tx)^2}\,dt}$$

$$h' = g'(x) = -2\,e^{-x^2}\int_0^1 x\,e^{-(tx)^2}\,dt + 2\,e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

$tx = y$: $dy = x\,dt \Rightarrow dt = \frac{dy}{x}$

$t=0 \Rightarrow y=0$

$t=1 \Rightarrow y=x$

$$= -2\,e^{-x^2}\int_0^x e^{-y^2}\,dy + 2\,e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}\,dt = 0$$

Donc h est bien constante.

2) $h(0) = 0^2 + \int_0^1 \frac{e^0}{1+t^2} dt$

$= [\arctan(t)]_0^1 = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$

Donc $h(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

3) $\underset{\text{car positive}}{0} \leq \underset{\underset{g(x)}{\shortparallel}}{\int_0^1 \frac{e^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2} dt} \leq \underset{\text{car décroissant et maximum en 0}}{\int_0^1 e^{-x^2} dt}$

$f^2 = h - g$

$\frac{\pi}{4} - 0 \leq h - g \leq \frac{\pi}{4} - \underbrace{e^{-x^2}}_{\xrightarrow[x \to +\infty]{} 0}$

Donc $f^2(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \frac{\pi}{4}$

$f(x) \longrightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$

Exercice 5

$F(x) = \int_0^A \cos(xt) e^{-t^2} dt$ $A \in \mathbb{R}_+^*$ fixé

$\frac{\partial}{\partial x} \cos(xt) e^{-t^2} = -t \sin(xt) e^{-t^2}$ qui est continue sur $\mathbb{R}$

donc F dérivable

et $F'(x) = \int_0^A -t \sin(xt) e^{-t^2} dt$

2) $F'(x) = -\int_0^A t\sin(xt)e^{-t^2}\,dt$

$= \int_0^A \left(\frac{e^{-t^2}}{2}\right)' \sin(xt)\,dt$

$= \left(\left[\frac{e^{-t^2}}{2}\sin(xt)\right]_0^A - \frac{x}{2}\int_0^A e^{-t^2}\cos(xt) \right)$

$u = \sin(xt) \quad v = \frac{e^{-t^2}}{2}$

$u' = x\cos(xt) \quad v' = \left(\frac{e^{-t^2}}{2}\right)'$

$\Rightarrow = -\frac{x}{2}F(x) + \frac{1}{2}e^{-A^2}\sin(xA)$

3) $\frac{\partial}{\partial x}\left(F(x)e^{\frac{x^2}{4}}\right) = F'(x)e^{\frac{x^2}{4}} + \frac{x}{2}e^{\frac{x^2}{4}}F(x)$

$= \frac{x}{2}e^{\frac{x^2}{4}}F(x) + F'(x)e^{\frac{x^2}{4}}$

$= \frac{x}{2}e^{\frac{x^2}{4}}F(x) + e^{\frac{x^2}{4}}\left(-\frac{x}{2}F(x) + \frac{1}{2}e^{-A^2}\sin(xA)\right)$

$= \cancel{\frac{x}{2}e^{\frac{x^2}{4}}F(x)} - \cancel{\frac{x}{2}e^{\frac{x^2}{4}}F(x)} + \frac{1}{2}e^{\frac{x^2}{4}}e^{-A^2}\sin(xA)$

$F(x)e^{\frac{x^2}{4}} = \frac{e^{-A^2}}{2}\int_0^x e^{\frac{t^2}{4}}\sin(tA)\,dt + F(0)$

$\Rightarrow F(x) = \frac{e^{-A^2}}{2}e^{-\frac{x^2}{4}}\int_0^x e^{\frac{t^2}{4}}\sin(tA)\,dt + F(0)e^{-\frac{x^2}{4}}$

6) $\int_0^{+\infty}\cos(xt)e^{-t^2}\,dt = F(0)e^{-\frac{x^2}{4}} = e^{-\frac{x^2}{4}}\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{x^2}{4}}$

car $\frac{e^{-A^2}}{2} \xrightarrow[A\to+\infty]{} 0$

4) $G(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt) e^{-t^2} dt$

$\cos(xt) e^{-t^2} \leq e^{-t^2}$ et $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ cv.

car $\cos(xt) \leq 1$

Donc G est définie.

$\frac{d}{dx} \cos(xt) e^{-t^2} = -t \sin(xt) e^{-t^2}$

$-t \sin(xt) e^{-t^2} \leq -te^{-t^2}$

$\int_0^{+\infty} -te^{-t^2} dt = \left[\frac{e^{-t^2}}{2} \right]_0^{+\infty}$ cv.

Donc G est dérivable.

$G'(x) = \int_0^{+\infty} -t \sin(xt) e^{-t^2} dt$

$= \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-t^2}}{2}\right)' \sin(xt)\, dt \quad = \left[\sin(xt) \frac{e^{-t^2}}{2}\right]_0^{+\infty} \to 0$

$-\frac{x}{2}\int_0^{+\infty} \cos(xt) e^{-t^2} dt$

$u = \sin(xt) \qquad v = \frac{e^{-t^2}}{2}$

$u' = x\cos(xt) \qquad v' = \left(\frac{e^{-t^2}}{2}\right)'$

$G'(x) = -\frac{x}{2} G(x)$

$G(x) - G(0) = \int_0^{+\infty} -\frac{x}{2} G(x)$

$\left(G(x) e^{\frac{x^2}{4}}\right)' = e^{\frac{x^2}{4}} G'(x) + \frac{x e^{\frac{x^2}{4}}}{2} G(x)$

$= -\frac{x}{2} e^{-\frac{x^2}{4}} G(x) + \frac{x}{2} e^{-\frac{x^2}{4}} G(x) = 0$

$G(x) e^{\frac{x^2}{4}} - G(0) e^{\frac{0^2}{4}} = \int_0^x \underbrace{\ }_{=0} dt = 0$

$G(x) e^{\frac{x^2}{4}} = G(0)$

$G(x) = G(0) e^{-\frac{x^2}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{x^2}{4}}$

Exercice 6

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\sin(t)}{t} & t \neq 0 \\ 1 & t = 0 \end{cases}$$

$$F(x) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-xt}$$

$f(t)$ est définie sur $\mathbb{R} \supset]0, +\infty[$
e^{-xt} aussi donc $F(x)$ aussi.

$f(t)$ est continue e^{-xt} aussi sur $\mathbb{R} \supset]a, +\infty[$

$|f(t)| \leq 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

$e^{-xt} \leq 1 \quad \forall (x,t) \in]a, +\infty[\times [0, +\infty[$ car $xt > 0$

Donc $f(t) e^{-xt} \leq e^{-at}$ $\quad \int_0^{+\infty} e^{-at} dt = \left[-\frac{e^{-at}}{a} \right]_0^{+\infty}$ converge

Donc F est continue sur $]a, +\infty[$ $\forall a > 0$
=> F est continue sur $]0, +\infty[$

2) $\frac{\partial}{\partial x} \left(f(t) e^{-xt} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{\sin(t)}{t} e^{-xt} \right) = -t \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt} = -\sin(t) e^{-xt}$

$|-\sin(t) e^{-xt}| \leq e^{-at}$ qui converge.

Alors F dérivable
et
$$F'(x) = -\int_0^{+\infty} \sin(t) e^{-xt}$$

3) $F'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \left(\frac{\cos(t)}{t} - \frac{\sin(t)}{t^2} - \sin(t) \right) dt$

$\frac{\partial u}{\partial x} =$

Exercice 7

1. $\int_0^1 \int_0^1 y e^{x+y^2} \, dx \, dy$

$= \int_0^1 y \left(\int_0^1 e^{x+y^2} dx \right) dy$

$= \int_0^1 y \left[e^{x+y^2} \right]_0^1 dy$

$= \int_0^1 y \left(e^{1+y^2} - e^{y^2} \right) dy$

$= \int_0^1 y e^{1+y^2} dy \quad - \int_0^1 y e^{y^2} dy$

$= \left[\frac{e^{1+y^2}}{2} \right]_0^1 - \left[\frac{e^{y^2}}{2} \right]_0^1$

$= \frac{e^2}{2} - \frac{e^1}{2} \quad - \frac{e^1}{2} + \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{2} (e^2 - 2e + 1)$

$\int_0^1 \int_0^1 x \ln(x(1+y)) \, dx \, dy$

$\int_0^1 x \left(\int_0^1 (\ln(x) + \ln(1+y)) dy \right) dx$

$\int_0^1 x \left[\ln(x) y \right]_0^1 dx \quad + \int_0^1 x \left(\int_0^1 \ln(1+y) \, dy \right) dx$

$\int_0^1 x \ln(x) \, dx \quad + \int_0^1 \ln(1+y) \, dy \; \int_0^1 x \, dx \quad \to \quad \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$

$\ln(x)$	$\frac{x^2}{2}$	$\ln(1+y)$	y
$\frac{1}{x}$	x	$\frac{1}{1+y}$	1

$\left[y \ln(1+y) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{y}{1+y} dy$

$- \int_0^1 1 - \frac{1}{1+y}$

$- \left[y - \ln(1+y) \right]_0^1$

$= \ln(2) - 1 + \ln(2)$

$= 2 \ln(2) - 1$

$\left[\frac{x^2}{2} \ln(x) \right] - \frac{1}{2} \int_0^1 x \, dx$

$\left[\frac{x^2}{2} \ln(x) - \frac{x^2}{4} \right]_0^1 = -\frac{1}{4}$

$-\frac{1}{4} + \frac{1}{2} (2 \ln(2) - 1$

$= -\frac{1}{4} + \ln(2) - \frac{2}{4} = \ln(2) - \frac{3}{4}$

Exercice 8

e^{-xy} continue sur $[\varepsilon, A] \times [a, b]$ donc le théorème de Fubini s'applique.

$$\int_\varepsilon^A \int_a^b e^{-xy}\, dx\, dy$$

$$= \int_\varepsilon^A \left[-\frac{e^{-xy}}{x}\right]_a^b dx = \int_\varepsilon^A \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\, dx$$

$$= \int_a^b \left(\int_\varepsilon^A e^{-xy}\, dx\right) dy = \int_a^b \left[-\frac{e^{-xy}}{y}\right]_\varepsilon^A dy$$

$$= \int_a^b \frac{e^{-\varepsilon y} - e^{-Ay}}{y}\, dy$$

$$= \int_a^b \frac{e^{-\varepsilon y}}{y}\, dy - \int_a^b \frac{e^{-Ay}}{y}\, dy$$

2) $\lim\limits_{A \to +\infty} \int_a^b \frac{e^{-Ay}}{y}\, dy = \int_a^b 0\, dy = 0$

$\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int_a^b \frac{e^{-\varepsilon y}}{y}\, dy = \int_a^b \frac{1}{y}\, dy = [\ln|y|]_a^b = \ln(b) - \ln(a)$
$= \ln\left(\frac{b}{a}\right)$

$$e^{-\varepsilon y} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} e^0 = 1$$

3. par 1 $\int_\varepsilon^A \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\, dx = \int_a^b \frac{e^{-\varepsilon y}}{y}\, dy - \int_a^b \frac{e^{-Ay}}{y}\, dy$
$= \ln\left(\frac{b}{a}\right)$ par (3)

Exercice 9

$e^{-x^2-y^2}$ est continue sur $[0,R]\times[0,R]$

$$\int_0^R \int_0^R e^{-x^2-y^2} dx\,dy = \int_0^R\int_0^R e^{-x^2} e^{-y^2}\, dx\, dy$$

$$= \left(\int_0^R e^{-x^2} dx\right)\left(\int_0^R e^{-y^2} dy\right)$$

posons $x = y$

$$= \left(\int_0^R e^{-x^2} dx\right)\left(\int_0^R e^{-x^2} dx\right)$$

$$= \left(\int_0^R e^{-x^2} dx\right)^2$$

2)
$$\int_0^\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2} r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\, d\theta \int_0^\rho e^{-r^2} r$$

$$= [\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-\frac{e^{-r^2}}{2}\right]_0^\rho$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(-\frac{e^{-\rho^2}}{2} + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{\pi}{4}\left(1 - e^{-\rho^2}\right) \underset{\rho = R}{=} \frac{\pi}{4}\left(1 - e^{-R^2}\right) \leq \int_0^R \int_0^R e^{-x^2-y^2} dx\,dy$$

car $D(R) \subset [0,R]\times[0,R]$ pas forcément égale.