1. $u_n = \frac{1+n^5}{n^2+3n} = \frac{n(\frac{1}{n}+n^4)}{n(n+3)} = \frac{\frac{1}{n}+n^4}{n+3} = \cancel{\frac{1}{n}} \cdot \cancel{\frac{n^5+1}{n+3}}$

$\hookrightarrow \sim \frac{n^4}{n} \sim n^3$

$\cancel{\frac{n^5+1}{n+3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^5}{n} \sim n^4}$

$\sum n^3$ diverge clairement.

Principe d'équivalence.

$v_n = \frac{1}{n}$

$w_n = n^4$

$u_n \sim v_n w_n$

$\sum v_n$ diverge car série harmonique

$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{(n+1)^4}{n^4} > 1$ donc $\sum w_n$ diverge

donc $\sum u_n$ diverge car multiple des séries divergente

2. $u_n = \left(\frac{2n-1}{n+1}\right)^{2n}$

On utilise le critère de Cauchy

$\alpha_n = (u_n)^{\frac{1}{2n}} = \frac{2n-1}{n+1} \sim \frac{2n}{n} = 2$

$\alpha_n = 2 > 1$ donc $\sum u_n$ diverge.

$a > 0$

$u_n = \left(\frac{2n-1}{n+1}\right)^{2n} a^n$

$\alpha_n = u_n^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{2n-1}{n+1}\right)^2 a$ $\qquad \left(\frac{2n-1}{n+1}\right)^2 \sim 2^2 = 4$

donc $u_n^{\frac{1}{n}} \sim 4a$

si $a < \frac{1}{4}$ donc $\sum u_n$ diverge

si $a > \frac{1}{4}$ donc $\sum u_n$ converge

supposons $a = \frac{1}{4}$

donc $u_n = \left(\frac{2n-1}{n+1}\right)^{2n}\left(\frac{1}{4}\right)^n = \left(\frac{2n-1}{n+1}\right)^{2n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$

$= \left(\frac{2n-1}{2(n+1)}\right)^{2n} = \left(\frac{2(n-\frac{1}{2})}{2(n+1)}\right)^{2n} = \left(\frac{n-\frac{1}{2}}{n+1}\right)^{2n}$

$= \left(\frac{1-\frac{1}{2n}}{1+\frac{1}{n}}\right)^{2n} = \frac{e^{-1}}{e^2} = e^{-3}$ donc $\sum u_n$ diverge.

3.

$$u_n = \frac{n!}{n^n}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\cancel{n!}(n+1)}{\cancel{n!}} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^n(n+1)} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{n^n}{n^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}$$
$$= e^{-1} < 1$$

donc $\sum u_n$ converge

- $\sum \frac{\sqrt{n}}{n^2+1} =$

$$\frac{\sqrt{n}}{n\left(n+\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{\sqrt{n}\left(n+\frac{1}{n}\right)}$$

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{9n+1}$

$$\frac{3}{9n+1} \underset{\sim}{<} \frac{3}{9n} = \frac{1}{3n} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{n}$$

$\sum \frac{1}{n}$ diverge, donc $\frac{1}{3}\sum \frac{1}{n}$ diverge aussi

Donc $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{9n+1}$ diverge

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$

$$\frac{1}{2n-1} \sim \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}$$

$$2n-1 \sim 2n$$

Donc $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ diverge

- c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge car $2>1$

Donc $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ converge absolument, donc converge.

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{n^2+n} \leq \frac{1}{n^2}$

donc $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

Or $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, donc $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ converge aussi.

e) $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n^2}$

$u_n = n e^{-n^2}$

$\alpha_n = u_n^{\frac{1}{n^2}} = n^{\frac{1}{n^2}} e^{-1} \qquad n^{\frac{1}{n^2}} = \sqrt[n^2]{n} \longrightarrow 1$

$\sim 1 e^{-1} = e^{-1} < 1$

donc $\sum n e^{-n^2}$ converge.

## 2.5.4

a) Soit $\sum x_n$ converge

Montrons que $\sum (x_{2n} + x_{2n+1})$ converge aussi

$\sum (x_{2n} + x_{2n+1}) = \sum x_{2n} + \sum x_{2n+1}$

Or $\sum x_n$ converge, donc $\sum x_{2n}$ converge aussi

$\sum x_{2n+1}$

Donc $\sum (x_{2n} + x_{2n+1})$ converge

2.5.7 Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ décroissant et $\sum x_n$ converge

$\sum x_n$ converge $\Rightarrow x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

$x_n < \frac{1}{n}$ car $\sum \frac{1}{n}$ diverge

$\Leftrightarrow n x_n < n \cdot \frac{1}{n} = 1$ donc $n \cdot x_n \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ décroissante et $\sum x_n$ converge

$\sum x_n$ converge $\Rightarrow$ $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0 \ \sum_{k=n}^{\infty} x_k < \varepsilon$

$x_n$ décroissante $\Rightarrow$ $x_{n+1} < x_n < x_{n-1} < \dots < x_1$

$\forall k \in \{n, 2n\}$ $u_k > u_{2n}$ $\Rightarrow$ $\sum_{k=n}^{2n} u_k > n u_{2n}$

Donc $\exists n_0$, $n_0 x_{n_0} \leq \sum_{k=n_0}^{2n_0} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

**2.5.8** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

$= \frac{-1}{n} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1}\right)}_{\text{car série alternée}}$

$= \frac{-1}{n} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1} \longrightarrow 0$

**2.5.15** $\sum x_n$ converge $\Leftrightarrow$ $\sum 2^n x_{2^n}$ converge

$\Rightarrow$) $x_n$ décroissante $\sum x_n$ converge

$2^n > n$ donc $x_{2^n} < x_n$ car $x_n$ décroissante

et $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ car $\sum x_n$ converge

donc $x_{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$\sum_{k=2^{n-1}}^{2^n} x_k \geq 2^n x_{2^n}$

$\sum x_n$ converge $\Rightarrow$ $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \sum_{k=n_0}^{\infty} x_k < \varepsilon$

donc $\exists n$, $2^n x_{2n} \leq \sum_{k=2^{n-1}}^{2^n} x_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

donc $2^n x_{2n} \longrightarrow 0$

2.5.16

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$

$u_n = \frac{\ln n}{n^2}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n u_{2^n} = \sum 2^n \frac{\ln 2^n}{(2^n)^2} = \sum \frac{\cancel{2^n} \cdot n \ln 2}{\cancel{2^n}\, 2^n} = \sum \frac{n \ln 2}{2^n}$$

$$\frac{n\ln 2 + \ln 2}{\cancel{2^n} \cdot 2} \cdot \frac{\cancel{2^n}}{n \ln^2} = \frac{n \ln 2 + \ln 2}{2n \ln 2} = \frac{(n+1)\cancel{\ln 2}}{2n \cancel{\ln 2}} = \frac{n+1}{2n} \sim \frac{1}{2} < 1$$

donc converge.

b) Par la série de Bertrand $\alpha < 1 \Rightarrow$ la série ne converge pas

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$

$u_n = \frac{1}{n \ln n}$

$$\sum 2^n u_{2^n} = \sum \cancel{2^n} \frac{1}{\cancel{2^n} \ln 2^n} = \sum \frac{1}{n \ln 2} = \frac{1}{\ln 2} \sum \frac{1}{n} \Rightarrow \text{diverge.}$$

c) $\sum \frac{1}{n(\ln n)^2}$ par la série de Bertrand $\alpha = 2 > 1$ donc converge

$u_n = \frac{1}{n(\ln n)^2}$

$$\sum 2^n \frac{1}{2^n (\ln 2^n)^2} = \sum \frac{1}{(n \ln 2)^2} = \sum \frac{1}{n^2 (\ln 2)^2} = (\ln 2)^{-2} \sum \frac{1}{n^2}$$

donc converge

d)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)(\ln \ln n)^2}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \cancel{2^n} \frac{1}{\cancel{2^n}(\ln 2^n)(\ln \ln 2^n)^2}$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln 2 (\ln(n \ln 2))^2} \qquad \frac{1}{n \ln^2(\ln(n \ln 2))^2} \sim \frac{1}{n(\ln n)^2}$$

por c) convergente.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1}\right)$$

$$= -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2n+1} \longrightarrow 0$$

$$\simeq -\frac{1}{2}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\cancel{n!}(n+1)}{\cancel{n!}} \frac{\cancel{2^n}}{\cancel{2^n} \cdot 2} = \frac{n+1}{2}$$

$$\frac{n+1}{\cancel{2^n} \cdot 2} \frac{\cancel{2^n}}{n} = \frac{n+1}{2n}$$

Exercice 5 TD

$$u_n = \ln(n) + a\ln(n+1) + b\ln(n+2)$$
$$= \ln(n) + a\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) + b\ln\left(n\left(1+\frac{2}{n}\right)\right)$$
$$= \ln(n) + a\ln(n) + a\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + b\ln(n) + b\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)$$
$$= (1+a+b)\ln(n) + a\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + b\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$a\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = a\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$
$$= \frac{a}{n} - \frac{a}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$b\ln\left(1+\frac{2}{n}\right) = b\left(\frac{2}{n} - \frac{4}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$
$$= \frac{2b}{n} - \frac{4b}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$u_n = (1+a+b)\ln(n) + \frac{a+2b}{n} + \frac{(-a-4b)}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
$$= (1+a+b)\ln(n) + \frac{a+2b}{n} + \frac{\frac{1}{2}(-a-4b)}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

2) $\sum u_n$ converge ssi $(1+a+b) = 0$ et $a+2b = 0$ $\Rightarrow \begin{cases} 1+a+b=0 \\ a+2b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1-b \\ -1-b+2b=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \end{cases}$

si $a = -2$
$b = 1$

3) $u_n = \frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{2}(2-4)\right) = \frac{1}{n^2}(1-2) = -\frac{1}{n^2}$

$\sum -\frac{1}{n^2} = -\sum \frac{1}{n^2} = -\frac{\pi^2}{6}$

## Exercice 7

$(u_n)_{n\geq 1}$ décroissante, st. pos

$$\sum_{k=n+1}^{2n} u_k = \underbrace{u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{2n}}_{n \text{ fois}}$$

Or $u_n$ est décroissante et st. pos, donc

$$u_{n+1} \geq u_{n+2} \geq u_{n+3} \geq \dots \geq u_{2n}$$

Donc $\sum_{k=n+1}^{2n} u_k \geq n u_{2n}$

2) $\sum u_n$ converge donc $u_n \longrightarrow 0$

Par l'abs. supposons que $n u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

D'après 1) $\sum_{k=n+1}^{2n} u_k \geq n u_{2n}$ et $\sum u_n$ converge, donc

$$n u_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow u_{2n} \sim \frac{\ell}{n}$ mais $\sum u_n$ converge par hyp
et $\sum \frac{\ell}{n} = \ell \sum \frac{1}{n}$ diverge

contradiction
donc $n u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

b) On pose $u_n = \frac{1}{n \ln n}$ $\quad n u_n = \frac{1}{\ln n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

par contre $\sum \frac{1}{n \ln n}$ diverge car série de Bertrand.

3. Soit $\sum u_n$ converge
Mq $\sum_{n\geq 1} n(u_n - u_{n+1})$ converge et $= \sum u_n$

$0(u_0 - u_1) + (u_1 -$

$$\sum_{k=1}^{n} k(u_k - u_{k+1}) = \sum_{k=1}^{n} k(u_k) - \sum_{k=1}^{n} k u_{k+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) u_{k+1} - \left(\sum_{k=0}^{n-1} k u_{k+1}\right) - 0 u_1 - n u_{n+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} k u_{k+1} + u_{k+1} - k u_{k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1} = \sum_{k=1}^{n} u_k$$

## Exercice 8

1. $u_n = \frac{1+n^5}{n^2+3^n} \sim \frac{n^5}{3^n}$

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^5}{3^n \cdot 3} \quad \frac{3^n}{n^5} \sim \frac{1}{3} < 1$ donc

$\sum u_n$ converge

2. $u_n = \left(\frac{2n-1}{n+1}\right)^{2n} a^n$

$\alpha_n = u_n^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{2n-1}{n+1}\right)^2 a$

$= \left(\frac{n(2-\frac{1}{n})}{n(1+\frac{1}{n})}\right)^2 a \sim 2^2 a = 4a$

$\sum u_n$ converge si $a > \frac{1}{4}$
$\sum u_n$ diverge si $a < \frac{1}{4}$

Etudions le cas ou $a = \frac{1}{4}$

$u_n = \left(\frac{2n-1}{n+1}\right)^{2n} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \left(\frac{2n(1-\frac{1}{2n})}{n(1+\frac{1}{n})}\right)^{2n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$

$= \left(\frac{2n(1-\frac{1}{2n})}{2n(1+\frac{1}{n})}\right)^{2n} = \left(\frac{1-\frac{1}{2n}}{1+\frac{1}{n}}\right)^{2n} = \frac{e^{-1}}{e^2} = e^{-3}$

Donc $\sum u_n$ diverge qd $a = \frac{1}{4}$

3) $u_n = \frac{n!}{n^n}$

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\cancel{n!}\cancel{(n+1)}}{(n+1)^n \cancel{(n+1)}} \quad \frac{n^n}{\cancel{n!}} = \frac{n^n}{(n+1)^n} < 1$

$= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} = e^{-1} < 1$

Donc $\sum u_n$ converge

4)

$$u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{1}{3}} - \left(\frac{n}{n+a}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\frac{1}{3}} - \left(1+\frac{a}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\sim \cancel{1} - \frac{1}{3n} + \frac{2}{9n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \left(\cancel{1} - \frac{a}{2n} + \frac{3a^2}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$$\sim -\frac{1}{3n} + \frac{2}{9n^2} + \frac{a}{2n} - \frac{3a^2}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\sim \left(-\frac{1}{3}+\frac{a}{2}\right)\frac{1}{n} + \left(\frac{2}{9} - \frac{3a^2}{8}\right)\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Si $a = \frac{2}{3}$ $\sum u_n$ converge, sinon diverge

5) $u_n = \dfrac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}} \sim \dfrac{1}{n}$ donc $\sum u_n$ diverge

$1 + \frac{1}{n} \sim 1$

6) $u_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n!)}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!} \frac{2n!}{(n!)^2} = \frac{\cancel{n!}(n+1)\cancel{n!}(n+1)}{\cancel{2n!}(2n+1)(2n+2)} \frac{\cancel{2n!}}{\cancel{(n!)^2}}$$

$$= \frac{(n+1)\cancel{(n+1)}}{(2n+1)2\cancel{(n+1)}} = \frac{n+1}{2(2n+1)}$$

$$= \frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{4n\left(1+\frac{1}{2n}\right)} \approx \frac{1}{4} < 1$$

donc $\sum u_n$ converge

7) $u_n = 1 - n\ln\left(\dfrac{2n+1}{2n-1}\right)$

$$= 1 - n\ln\left(\frac{2n\left(1+\frac{1}{2n}\right)}{2n\left(1-\frac{1}{2n}\right)}\right) = 1 - n\ln\left(\frac{1+\frac{1}{2n}}{1-\frac{1}{2n}}\right)$$

$$= 1 - \ln\left(\frac{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n}{\left(1-\frac{1}{2n}\right)^n}\right)$$

$$\approx 1 - \ln\left(\frac{e^{\frac{1}{2}}}{e^{-\frac{1}{2}}}\right) = 1 - \ln(e)$$

$$= 1 - 1 = 0$$

7) $U_n = 1 - n\ln\left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)$

$$= 1 - n\ln\left(\frac{2n(1+\frac{1}{2n})}{2n(1-\frac{1}{2n})}\right) = 1 - n\ln\left(\frac{1+\frac{1}{2n}}{1-\frac{1}{2n}}\right) = 1 - n\left(\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{2n}\right)\right)$$

$$= 1 - n\left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + \frac{1}{24n^3} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \left(-\frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} - \frac{1}{24n^3} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right)$$

$$= \cancel{1} - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{8n}} - \frac{1}{24n^2} - \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{8n}} - \frac{1}{24n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$= -\frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Donc $\sum u_n$ converge car $\frac{1}{n^2}$ converge

8) $u_n = \dfrac{\ln^2(n)}{\sqrt[5]{n^6}+1} \sim \dfrac{1}{n^{\frac{6}{5}}\ln(n)^{-2}}$

c'est une série de Bertrand ou $\alpha > 1$
donc $\sum u_n$ converge

2. <u>Exercice 11</u>

Soit $n \geq 1$, $u_n = \dfrac{1}{\ln(n) + (-1)^n n}$

1. On pose $v_n = u_n - \dfrac{(-1)^n}{n} = \dfrac{1}{\ln(n)+(-1)^n n} - \dfrac{(-1)^n}{n}$

$$v_n = \frac{1}{n\left(\frac{\ln(n)}{n} + (-1)^n\right)} - \frac{(-1)^n}{n}$$

$$= \frac{1 - \left((-1)^n\left(\frac{\ln(n)}{n} + (-1)^n\right)\right)}{n\left(\frac{\ln(n)}{n} + (-1)^n\right)}$$

$$= \frac{-\frac{\ln(n)}{n}(-1)^n}{\ln(n) + (-1)^n n}$$

$$= \frac{-\ln(n)(-1)^n}{n^2\left(\frac{\ln(n)}{n} + (-1)^n\right)} \sim -\frac{\ln(n)}{n^2} = -\frac{1}{n^2\ln(n)^{-1}}$$

Donc $v_n$ est une série de Bertrand avec $n^\alpha$ où $\alpha > 1$
donc $\sum v_n$ converge

2.

$$u_n = v_n + \frac{(-1)^n}{n}$$

$\frac{(-1)^n}{n}$ converge car série alterné avec terme $\longrightarrow 0$

D'après 1. $v_n$ converge

Donc $\sum u_n$ converge car somme des série convergentes.

2 - <u>Exercice 13</u>

$$v_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$$

Soit $\alpha > 1$ alors $|v_n| = \frac{1}{n^\alpha + (-1)^n} \sim \frac{1}{n^\alpha}$ or $\alpha > 2$

donc $\sum |v_n|$ converge absolument, donc converge

$$v_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\left(\frac{1}{1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}}\right)$$

$$v_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\left(1 - \frac{(-1)^n}{n^\alpha} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right)$$

$$= \frac{(-1)^n}{n^\alpha} - \frac{1}{n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)$$

Si $\alpha < 0$ alors $v_n \underset{n \to +\infty}{\not\longrightarrow} 0$

donc $\sum v_n$ diverge

Si $\alpha > \frac{1}{2}$ donc $\sum v_n$ cv car $-\frac{1}{n^{2\alpha}}$ cv et $\frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ série alternée

Si $\alpha \leq \frac{1}{2}$ alors $v_n$ diverge car $\sum \frac{1}{n^{2\alpha}}$ diverge

mais diverge absolument si $\alpha \leq 1$

## Exercice 10

$n \geq 1$ on note $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$

$$\forall k \geq 1 \quad \frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,dt \leq \frac{1}{k}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$$

$$H_{n+1} - 1 \leq \int_1^{n+1} \frac{1}{t}\,dt \leq H_n$$

$$\Leftrightarrow H_{n+1} - 1 \leq \underbrace{\ln(n+1) \leq H_n}$$

$$H_n - 1 \leq \int_1^n \frac{1}{t}\,dt \leq H_{n-1}$$

$$\Leftrightarrow H_n - 1 \leq \ln(n) \leq H_{n-1}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{H_n \leq \ln(n) + 1} \leq H_{n-1} + 1$$

Donc $\ln(n+1) \leq H_n \leq \ln(n) + 1$

$$\begin{aligned}
\ln(n) + 1 - \ln(n+1) &= \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) + 1 \\
&= \ln\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right) + 1 \\
&= \ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1}\right) \\
&= -\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + 1 \\
&\sim 0 + 1 = 1
\end{aligned}$$

Donc $H_n \approx \ln(n)$

2 $u_n = H_n - \ln(n)$

$$\begin{aligned}
u_{k+1} - u_k &= (H_{k+1} - \ln(k+1)) - (H_k - \ln(k)) \\
&= \frac{1}{k+1} - (\ln(k+1) - \ln(k))
\end{aligned}$$

D'après 1.a) $\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{k} \leq -(\ln(k+1) - \ln(k)) \leq -\frac{1}{k+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} \leq \frac{1}{k+1} - (\ln(k+1) - \ln(k)) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{k-k-1}{k(k+1)} = -\frac{1}{k(k+1)} \leq u_{k+1} - u_k \leq 0$$

$$= \frac{1}{k+1} - (\ln(k+1) - \ln(k))$$

$$= \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$$

$$= \frac{1}{k+1} - \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$$

$$\approx \frac{1}{k+1} - \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2}\right)$$

$$\approx \frac{1}{k+1} - \frac{2k}{2k^2} - \frac{1}{2k^2}$$

$$= \frac{1}{k+1} - \frac{2k-1}{2k^2}$$

$$= \frac{2k^2 - (k+1)(2k-1)}{2k^2(k+1)} = \frac{\cancel{2k^2} - (\cancel{2k^2} + 2k - k - 1)}{2k^2(k+1)}$$

$$= \frac{-(k-1)}{2k^2(k+1)} \approx -\frac{1}{2k^2}$$

Donc $u_{k+1} - u_k \approx -\frac{1}{2k^2}$

Donc $\sum_{k\geq 1}(u_{k+1} - u_k) \approx \sum -\frac{1}{2k^2}$ converge

$= \varphi$ car $\sum \frac{1}{k^2}$ converge

$=$

$$\sum_{k\geq 1}(u_{k+1} - u_k) = -u_1 + u_{k+1} = \varphi \quad \text{converge}$$

$$-u_1 = -1 + u_{k+1}$$

$$\sum_{k\geq 1}^{n-1}(u_{k+1} - u_k) = -u_1 + u_n = \varphi \qquad \text{donc } u_n \text{ converge}$$

$$-1 + u_n = \varphi \iff u_n = 1 + \varphi$$

$$u_n = 1 + \varphi = H_n - \ln(n)$$

$$\iff 1 + \varphi = H_n - \ln(n)$$

$$\iff H_n = \ln(n) + \varphi + 1 \qquad \text{Or } H_n \leq \ln(n) + 1$$

donc $\varphi \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

3. $n \geq 1$ $S_n = \sum_{k=1}^{n} \left( \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{(-1)k} = -\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$

$S_{2n} =$

$H_{2n} - H_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$